Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo

Marko Razpet

Teorija množic z matematično logiko

Študijsko gradivo

Ljubljana, januar 2006

Kazalo

Predgovor

Za akademsko leto 2002/03 mi je bil na Pedagoški fakulteti v Ljubljani zaupan predmet *Teorija množic z matematično logiko.* Lotil sem se ga po knjigah prof. dr. Nika Prijatelja, ki nam je predmet s podobno vsebino predaval v letih 1964/65 na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Takrat smo tak predmet imeli že v prvem letniku. Nekatere vsebine z njegovih predavanj sem si za vselej zapomnil, precej pa sem si jih moral osvežiti. Naloga mi ni bila lahka, saj sem predmet podedoval po profesorjevi hčerki doc. dr. Andreji Prijatelj, ki ga je odlično obvladala, žal pa nas je prerano in za vedno zapustila.

Na Pedagoški fakulteti pa je tako naneslo, da se predmet predava šele v zadnjem letniku, kar ima svoje prednosti in slabosti. Prednosti vidim v tem, da študentje od daleč pogledajo na prehojeno matematično pot v prejšnjih treh letih univerzitetnega študija in ponovijo osnove matematike, ki so jih dobili raztresene pri drugih predmetih. Priložnost pa imajo tudi nekoliko popraviti svoje povprečje ocen. Slabost pa je v tem, da dobijo občutek, da so vse to že nekje slišali in predmeta ne jemljejo preveč resno.

Pred vami je delovno gradivo, ki je nastajalo zadnja leta, in ki naj bi omogočalo, da se študent laže znajde v poplavi množice znanih in neznanih simbolov, aksiomov, definicij in izrekov. Na koncu je prikazana celotna hebrejska abeceda z angleškimi imeni črk, čeprav bomo uporablali le prvo: $\aleph$, alef.

Ljubljana, oktober 2005 — Dr. Marko Razpet

1 Logične ekvivalence

V nadaljevanju so z $A, B, C, \ldots$ označene poljubne izjave, za katere se lahko opredelimo, ali so pravilne (resnične) ali nepravilne (neresnične). Najprej navedimo najosnovnejše logične ekvivalence, ki so tavtologije, torej sestavljene izjave z lastnostjo, da so vselej pravilne, ne glede na pravilnost oziroma nepravilnost atomarnih izjav, ki jih sestavljajo. Z logičnimi ekvivalencami pretvarjamo dano sestavljeno izjavo na drugo enakovredno želeno obliko. Primere bomo srečali v nadaljevanju.

$$A \iff \neg(\neg A) \tag{1}$$

$$A \implies B \iff \neg(A \wedge \neg B) \tag{2}$$

$$A \wedge B \iff B \wedge A \tag{3}$$

$$A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C \tag{4}$$

$$A \vee B \iff B \vee A \tag{5}$$

$$A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C \tag{6}$$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{7}$$

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{8}$$

$$A \wedge A \iff A \tag{9}$$

$$A \vee A \iff A \tag{10}$$

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B \tag{11}$$

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B \tag{12}$$

$$A \implies B \iff \neg A \vee B \tag{13}$$

$$A \vee B \iff \neg A \implies B \tag{14}$$

$$A \implies B \iff \neg B \implies \neg A \tag{15}$$

$$(A \iff B) \iff (A \implies B) \wedge (B \implies A) \tag{16}$$

$$(A \iff B) \iff (B \iff A) \tag{17}$$

$$(A \iff B) \iff (\neg A \iff \neg B) \tag{18}$$

$$A \vee B \iff \neg(\neg A \wedge \neg B) \tag{19}$$

$$A \wedge B \iff \neg(\neg A \vee \neg B) \tag{20}$$

$$(A \iff B) \iff (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \tag{21}$$

$$(A \iff B) \iff (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \tag{22}$$

$$\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B) \tag{23}$$

$$\neg(A \iff B) \iff (A \iff \neg B) \tag{24}$$

$$A \vee \neg A \tag{25}$$

$$A \iff A \tag{26}$$

$$\neg(A \wedge \neg A) \tag{27}$$

2 Logične implikacije

Sedaj pa navedimo najosnovnejše logične implikacije, ki so tudi tavtologije. Z njimi logično sklepamo.

$$A \implies A \vee B \tag{28}$$

$$A \wedge B \implies A \tag{29}$$

$$A \wedge \neg A \implies B \tag{30}$$

$$(A \vee B) \wedge \neg A \implies B \tag{31}$$

$$(A \implies B) \wedge A \implies B \tag{32}$$

$$(A \implies B) \wedge \neg B \implies \neg A \tag{33}$$

$$(A \iff B) \implies (A \implies B) \tag{34}$$

$$(A \iff B) \implies (B \implies A) \tag{35}$$

$$(A \iff B) \wedge A \implies B \tag{36}$$

$$(A \iff B) \wedge \neg A \implies \neg B \tag{37}$$

$$(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C) \tag{38}$$

$$(A \iff B) \wedge (B \iff C) \implies (A \iff C) \tag{39}$$

$$(A \implies B) \implies (A \vee C \implies B \vee C) \tag{40}$$

$$(A \implies B) \implies (A \wedge C \implies B \wedge C) \tag{41}$$

$$(A \implies B) \implies ((C \implies A) \implies (C \implies B)) \tag{42}$$

$$(A \implies B) \implies ((B \implies C) \implies (A \implies C)) \tag{43}$$

$$B \implies (A \iff A \wedge B) \tag{44}$$

$$\neg B \implies (A \iff A \vee B) \tag{45}$$

3 Rešeni nalogi iz matematične logike

3.1 Prva naloga

Pretvori izjavo

$$A \wedge \neg B \iff C \tag{I}$$

na enakovredno normalno disjunktivno oziroma konjunktivno obliko.

Normalna disjunktivna oblika. Najprej z (22)[1] odpravimo znak ekvivalence, nato uporabimo še De Morganovo pravilo (11) in pravilo dvojne

[1] Glej seznam logičnih ekvivalenc

negacije (1):

$$I \iff [(A \wedge \neg B) \wedge C] \vee [\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg C] \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee [(\neg A \vee B) \wedge \neg C]$$

Sedaj uporabimo distributivnostni zakon (8):

$$I \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C)$$

Zadnji dve konjunkciji nimata izjave B oziroma A, zato ju razširimo s tavtologijo $B \vee \neg B$ oziroma $A \vee \neg A$:

$$I \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee [\neg A \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg C] \vee [(A \vee \neg A) \wedge B \wedge \neg C]$$

Potem spet uporabimo distributivnostni zakon (8):

$$I \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C)$$

Ker sta druga in zadnja konjunkcija enaki, lahko zaradi (5) in (10) eno od njiju opustimo in končno imamo pred seboj želeno normalno disjunktivno obliko:

$$I \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Normalna konjunktivna oblika. Ena od variant reševanja naloge, morda ne najkrajša, kjer s pridom uporabimo nekaj korakov pretvorbe od prej, je tale:

$$I \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee [(\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C)]$$

Sedaj v oglatem oklepaju večkrat uporabimo distributivnostni zakon (7) in dobimo:

$$I \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee [(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee \neg C)]$$

Očitno lahko poenostavimo zadnjo disjunkcijo po (10):

$$I \iff (A \wedge \neg B \wedge C) \vee [(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge \neg C]$$

Po distributivnostnem zakonu (7) je:

$$I \iff (A \vee \neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge$$
$$\wedge (\neg B \vee \neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge$$
$$\wedge (C \vee \neg A \vee B) \wedge (C \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (C \vee B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg C)$$

Takoj opazimo, da so 1., 2., 5., 7., 10., 11. in 12 disjunkcija v zgornji konjunkciji tavtologije in jih lahko izpustimo, poleg tega pa še uredimo po abecedi:

$$I \iff (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

Očitno veljajo ekvivalence

$$A \vee \neg C \iff A \vee (B \wedge \neg B) \vee \neg C \iff (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C)$$

in

$$\neg B \vee \neg C \iff (A \wedge \neg A) \vee \neg B \vee \neg C \iff (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

Nazadnje je pred nami iskana normalna konjunktivna oblika:

$$I \iff (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$$

Naloge se lahko lotimo tudi z uporabo logičnih ekvivalence (21) in (7):

$$I \iff [\neg(A \wedge \neg B) \vee C] \wedge [(A \wedge \neg B) \vee \neg C] \iff (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg C)$$

Sedaj vključimo v zadnji dve disjunkciji logični protislovji $B \wedge \neg B$ oziroma $A \wedge \neg A$:

$$I \iff (\neg A \vee B \vee C) \wedge [A \vee (B \wedge \neg B) \vee \neg C] \wedge [(A \wedge \neg A) \vee \neg B \vee \neg C]$$

Distributivnostni zakon (7) nam da:

$$I \iff (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

Ker sta 3. in 4. disjunkcija enaki, imamo nazadnje:

$$I \iff (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$$

Druga pot je očitno krajša in preglednejša.

3.2 Druga naloga

Pretvori izjavo

$$(\neg A \vee B) \wedge C \Longrightarrow B \wedge C \tag{J}$$

na enakovredno normalno disjunktivno oziroma konjunktivno obliko.

Normalna disjunktivna oblika. Logične ekvivalence (13) ter (11) in (12) nam dajo:

$$J \Longleftrightarrow \neg[(\neg A \vee B) \wedge C] \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow [(A \wedge \neg B) \vee \neg C] \vee (B \wedge C)$$

Torej imamo že disjunktivno obliko:

$$J \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee \neg C \vee (B \wedge C)$$

Ko zgornje konjunkcije razširimo s tavtologijami $A \vee \neg A$, $B \vee \neg B$ oziroma $C \vee \neg C$, dobimo:

$$J \Longleftrightarrow [A \wedge \neg B \wedge (C \vee \neg C)] \vee [(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B) \wedge \neg C] \vee [(A \vee \neg A) \wedge B \wedge C]$$

Distributivnostni zakon (8) nam prinese:

$$J \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee$$

$$\vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

Druga in četrta konjunkciji sta enaki, zato lahko eno izpustimo in imamo želeno obliko:

$$J \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee$$

$$\vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$$

Normalna konjunktivna oblika. Zapišimo:

$$J \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee [\neg C \vee (B \wedge C)]$$

Potem imamo najprej

$$J \iff (A \wedge \neg B) \vee [(\neg C \vee B) \wedge (\neg C \vee C)] \iff (A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee B)$$

nato pa takoj

$$J \iff (A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B)$$

Ker je zadnja disjunkcija tavtologija, imamo nazadnje iskano obliko:

$$J \iff A \vee \neg C \vee B$$

4 Aksiom ekstenzionalnosti

(A_1) Če je reč a enaka reči b, potem je reč b v množici A, kakor hitro je v A reč a.

5 Aksiom o podmnožicah

(A_2) Naj bo P lastnost, ki je smiselna za elemente množice A. Tedaj obstaja neka množica E, ki ima za elemente natanko tiste elemente množice A, ki imajo lastnost P.

6 Aksiom o paru

(A_3) Če sta a in b poljubni različni reči, potem obstaja natanko ena množica A, ki ima svoja edina elementa reči a in b.

7 Aksiom o uniji

(A_4) Če sta A in B poljubni množici, potem obstaja natanko ena množica C, ki je unija množic A in B.

7.1 Aksiom o uniji družine

($A_4{}'$) Če je $\mathcal{A}$ dana družina množic, potem obstaja natanko ena množica C, ki je unija te družine.

8 Lastnosti unije, preseka in razlike

$$A \cup B = B \cup A\,, \quad A \cap B = B \cap A \tag{46}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{47}$$

$$A \cup A = A\,, \quad A \cap A = A \tag{48}$$

$$A \cup \emptyset = A\,, \quad A \cap \emptyset = \emptyset \tag{49}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)\,, \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{50}$$

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B\,, \quad A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A \tag{51}$$

$$A \setminus (A \cap B) = A \setminus B \tag{52}$$

$$A \cap (A \setminus B) = A \setminus B \tag{53}$$

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B \tag{54}$$

$$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B \tag{55}$$

$$(A \cap B) \setminus B = \emptyset \tag{56}$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \tag{57}$$

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \tag{58}$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{59}$$

9 Lastnosti komplementa množice

Naj bo S univerzum. Če je $A \subseteq S$, naj bo $A^{\mathbf{C}}$ komplement množice A.

$$S^{\mathbf{C}} = \emptyset\,, \quad \emptyset^{\mathbf{C}} = S\,, \quad (A^{\mathbf{C}})^{\mathbf{C}} = A \tag{60}$$

$$A \cup A^{\mathbf{C}} = S\,, \quad A \cap A^{\mathbf{C}} = \emptyset \tag{61}$$

$$A \setminus B = A \cap B^{\mathbf{C}} \tag{62}$$

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B^{\mathbf{C}} \subseteq A^{\mathbf{C}} \tag{63}$$

$$(A \cup B)^{\mathbf{C}} = A^{\mathbf{C}} \cap B^{\mathbf{C}}\,, \quad (A \cap B)^{\mathbf{C}} = A^{\mathbf{C}} \cup B^{\mathbf{C}} \tag{64}$$

10 Aksiom o potenčni množici

(A_5) K vsaki množici A obstaja natanko ena množica C, ki je njena potenčna množica.

11 Lastnosti potenčne množice

Če je A poljubna dana množica, naj $\mathcal{P}A$ označuje njeno potenčno množico.

$$A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B \tag{65}$$

$$(\mathcal{P}A) \cup (\mathcal{P}B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \tag{66}$$

$$(\mathcal{P}A) \cap (\mathcal{P}B) = \mathcal{P}(A \cap B) \tag{67}$$

12 Lastnosti kartezičnega produkta

$$A \times B = \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \tag{68}$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \tag{69}$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \tag{70}$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C) \tag{71}$$

13 Aksiom izbire

(A_6) Če je $\mathcal{A}$ poljubna družina nepraznih množic, potem je kartezični produkt te družine neprazna množica.

14 Ekvipolentne množice

Množica A je **ekvipolentna** množici B natanko tedaj, kadar obstaja vsaj ena bijektivna preslikava množice A na množico B. To zapišemo simbolično takole: $A \sim B$. Pravimo tudi, da imata A in B enako moč.
Še v logičnih simbolih:

$$A \sim B \Longleftrightarrow \exists f (f \in B^A,\ f \text{ je bijekcija iz } A \text{ na } B)\,.$$

Množica A ima **večjo moč** kot množica B natanko tedaj, kadar ima množica A vsaj eno podmnožico A_1, ki je ekvipolentna množici B, množica B pa nima nobene podmnožice, ki bi bila ekvipolentna množici A. To zapišemo simbolično v obliki $A > B$ oziroma $B < A$.
Zakon trihotomije, ki je enakovreden aksiomu izbire, trdi, da sta dve poljubni množici A in B primerljivi glede na njuno moč, in sicer velja natanko ena od treh možnosti:

$$A > B \quad \text{ali} \quad A < B \quad \text{ali} \quad A \sim B\,.$$

Po **Peirceu in Dedekindu** je množica S neskončna tedaj in samo tedaj, ko ima vsaj eno pravo podmnožico, ki je z njo ekvipolentna. Če množica ni neskončna, je končna.
Po **Tarskem** je množica S končna tedaj in samo tedaj, kadar ima vsaka neprazna družina podmnožic množice S vsaj en minimalen element glede na relacijo stroge inkluzije $\subset$. Če množica ni končna, je neskončna.
Prazna množica $\emptyset$ je končna. Množica par $V = \{a, b\}$ je končna. Podmnožica B končne množice A je končna.
Če je A končna množica, potem sta za vsako množico B množici $A \cap B$ in $A \setminus B$ tudi končni.
Unija dveh končnih množic je končna množica. Če je A končna množica, je množica $A \cup \{x\}$ tudi končna. Unija končne družine samih končnih množic

je spet končna množica.
Vsaka neprazna družina podmnožic končne množice ima vsaj en maksimalen element glede na relacijo stroge inkluzije $\subset$.

15 Princip indukcije pri končnih množicah

Naj bo A dana končna množica, P pa lastnost, ki je smiselna za podmnožice množice A. Če velja lastnost P za prazno množico $\emptyset$ in če lahko za vsak element x množice A in za vsako podmnožico X množice A sklepamo, da lastnost P velja za $X \cup \{x\}$, kakor hitro P velja za X, potem lastnost P velja za vso množico A.
Če je A končna množica in f surjektivna funkcija iz množice A na neko množico B, potem je tudi B končna množica.
Če je končna množica A ekvipolentna množici B, potem je tudi B končna množica.
Končna množica ne more biti ekvipolentna z nobeno svojo pravo podmnožico.
Potenčna množica $\mathcal{P}A$ končne množice A je končna množica.
Če je množica A končna, množica B pa ne, potem ima A manjšo moč kot B.
Če sta množici A in B končni, potem sta končni tudi množici $A \times B$ in A^B.

16 Aksiom o neskončnosti

(A_7) Obstaja vsaj ena množica M, ki ima lastnosti:
1. prazna množica $\emptyset$ je njen element: $\emptyset \in M$;
2. če je poljubna množica A njen element, potem je množica $A \cup \{A\}$ tudi njen element:

$$A \in M \Rightarrow A \cup \{A\} \in M\,.$$

Množica M je neskončna. Najmanjša množica, ki ustreza aksiomu (A_7), je množica

$$\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots\}\,.$$

Vsaka množica A, ki je ekvipolentna množici $\mathbb{N}$, je števno neskončna.
Če je dana množica A neskončna in je podmnožica neke množice B, potem je tudi množica B neskončna.
Če je dana množica A neskončna in ekvipolentna množici B, potem je tudi množica B neskončna.

17 Peanova množica

Množica Π je Peanova, če v njej veljajo naslednji aksiomi:
1. V množici Π je neki element, ki ga označimo z 0.
2. Če je x v množici Π, potem obstaja v Π natanko en element x', ki mu pravimo neposredni naslednik elementa x.
3. V množici Π ni nobenega elementa, ki bi imel 0 za svojega neposrednega naslednika.
4. Če sta x in y elementa v Π in velja $x' = y'$, potem velja tudi $x = y$,
5. Če je M v Π taka podmnožica, v kateri je element 0 in element x', kakor hitro je x v M, potem je $M = \Pi$.
Množica $\mathbb{N}$ je Peanova. Tolmačimo jo kot množico naravnih števil:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset \\ 1 &= \{\emptyset\} \\ 2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Množica naravnih števil

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, n', \ldots\}$$

je števno neskončna.

Princip popolne indukcije. Naj bo P lastnost, ki je smiselna za elemente množice $\mathbb{N}$. Če lastnost P velja za element 0 in če lastnost P velja za n', kakor hitro velja za n, potem lastnost P velja za vsak element n množice $\mathbb{N}$.

Vsaka neskončna množica ima vsaj eno števno neskončno podmnožico.

Vsaka neskončna podmnožica kakšne števno neskončne množice je tudi števno neskončna.

Unija dveh števno neskončnih množic je števno neskončna množica. Unija končne in števno neskončne množice je števno neskončna množica. Unija števno neskončne družine samih števno neskončnih množic je tudi števno neskončna množica.

Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je števno neskončna.

Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ je števno neskončna.

Interval $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ ni števno neskončna množica.

Če bi namreč bilo samo števno mnogo števil na intervalu $(0, 1]$, bi jih lahko zapisali v decimalni obliki:

$$\begin{aligned}
0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \ldots a_n^1 \ldots \\
0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \ldots a_n^2 \ldots \\
0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \ldots a_n^3 \ldots \\
\ldots \\
0, a_1^n a_2^n a_3^n \ldots a_n^n \ldots \\
\ldots
\end{aligned}$$

Toda števila

$$b = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots \, ,$$

kjer izberemo

$$b_1 = 1\,, \quad \text{če} \quad a_1^1 \neq 1, \quad \text{in} \quad b_1 = 2, \quad \text{če je} \quad a_1^1 = 1\,,$$

$$b_2 = 1\,, \quad \text{če} \quad a_2^2 \neq 1, \quad \text{in} \quad b_2 = 2, \quad \text{če je} \quad a_2^2 = 1\,,$$

$$b_3 = 1\,, \quad \text{če} \quad a_3^3 \neq 1, \quad \text{in} \quad b_3 = 2, \quad \text{če je} \quad a_3^3 = 1\,,$$

itd., ni na zgornjem spisku. Torej vsebuje interval $(0,1]$ več kot števno mnogo števil.

Množica algebraičnih števil je števno neskončna množica.

Realno ali kompleksno število je transcendentno, če ni algebraično.

Če je množica A neskončna, množica B pa končna ali števno neskončna, razlika $A \setminus B$ pa neskončna množica, potem je $A \setminus B$ ekvipolentna množici A.

Če je A neskončna množica, B pa končna ali števno neskončna množica, potem je $A \cup B$ ekvipolentna množici A.

Odprt interval $(0,1)$ je ekvipolenten intervalu $(0,1]$.

Interval $(0,1)$ je ekvipolenten množici vseh realnih števil $\mathbb{R}$. Funkcija $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x)$ bijektivno preslika $(0,1)$ na vso realno os $\mathbb{R}$.

Velja: $\mathbb{R} > \mathbb{N}$.

Pravimo, da ima vsaka množica, ki je ekvipolentna množici $\mathbb{R}$, moč kontinuuma.

Vsaka števno neskončna množica ima manjšo moč od moči kontinuuma.

Vsa transcendentna števila imajo moč kontinuuma.

Množica funkcij $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ima moč, ki je večja od moči kontinuuma.

Cantorjev izrek pravi, da za vsako množico S obstajajo množice, ki imajo večjo moč kot S. Taka je na primer potenčna množica $\mathcal{P}S$.

18 Aksiom o kardinalnih številih

(A_8) Vsaki množici A je prirejen neki objekt $K(A)$, kardinalno število množice A, in sicer tako, da pripada dvema ekvipolentnima množicama isto kardinalno število:

$$A \sim B \Longleftrightarrow K(A) = K(B)\,.$$

Kardinalno število je končno ali neskončno natanko tedaj, ko je množica, kateri je prirejeno, končna ali neskončna.
Množica vseh končnih kardinalnih števil je Peanova množica, ki jo smemo imeti za množico naravnih števil $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &= K(\emptyset) \\ 1 &= K(\{\emptyset\}) \\ 2 &= K(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \\ 3 &= K(\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$K(A) > K(B) \Longleftrightarrow A > B \,.$$

Z relacijo $>$ so kardinalna števila strogo linearno urejena.

$$K(\mathbb{N}) = \aleph_0 \,, \quad K(\mathbb{R}) = \aleph \,.$$

$$\aleph > \aleph_0 \,, \quad K(\mathcal{P}A) > K(A) \,, \mathcal{P}\mathbb{N} \sim \mathbb{R} \,.$$

Problem kontinuuma. Ali obstaja množica A, za katero bi veljala relacija

$$\aleph > K(A) > \aleph_0 \,?$$

Posplošen problem kontinuuma. Ali obstaja množica A, za katero bi veljala relacija

$$K(\mathcal{P}S) > K(A) > K(S) \,,$$

pri čemer je S poljubna neskončna množica?

19 Aksiom substitucije

(A_9) Če je A poljubna množica in f poljubna funkcija, definirana na množici A, potem obstaja množica, ki ima za elemente f-slike $f(x)$ elementov x množice A.
Če je domena kakšne funkcije f množica A, potem je njena zaloga vrednosti množica.

20 Aksiom regularnosti

(A_{10}) Vsaka neprazna množica A ima vsaj en element x tak, da x in A nimata nobenega skupnega elementa.
Ne obstaja nobena množica, ki bi imela samo sebe za element.
Če bi bilo $A \in A$, bi imeli tudi $A \in A \cap \{A\}$. Obstaja, po aksiomu regularnosti, vsaj en $x \in \{A\}$ tak, da je $\{A\} \cap x = \emptyset$. To pomeni $x = A$, ker ima množica $\{A\}$ en sam element, to je A, torej $\{A\} \cap A = \emptyset$. To pa ne gre, ker je $\{A\} \cap A \neq \emptyset$.

21 Nekaj izpitnih nalog

1. KOLOKVIJ IZ TEORIJE MNOŽIC Z MATEMATIČNO LOGIKO

1. Preverite, ali je sestavljena izjava

$$((A \Longrightarrow \neg B) \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee B)$$

tavtologija.

2. Poiščite sestavljeno izjavo $F(A, B, C)$, ki bo imela resničnostno tabelo

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Izrazite $F(A,B,C)$ z ekvivalentno izjavo, ki ima dve implikaciji in eno negacijo. Uporabite lahko oklepaje.

3. Dani sta množici

$$A = \{1,2\} \quad \text{in} \quad B = \{2,3\}\,.$$

Zapišite množice

$$A \cup B,\ A \cap B,\ A \times B \quad \text{in} \quad A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Nato zapišite potenčne množice vseh zgoraj nastopajočih množic in postavite znak $\star$, ki ga lahko izbirate v množici znakov $Z = \{=, \neq, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset\}$ tako, da bodo pravilne naslednje relacije:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A \cup B) &\ \star\ \mathcal{P}A \cup \mathcal{P}B \\
\mathcal{P}(A \cap B) &\ \star\ \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B \\
\mathcal{P}(A \times B) &\ \star\ \mathcal{P}A \times \mathcal{P}B \\
\mathcal{P}(A + B) &\ \star\ \mathcal{P}A + \mathcal{P}B
\end{aligned}$$

4. Bodita A in B poljubni množici. Dokažite:

$$(A \cap B) \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (B \times A) = (A \times A) \cap (B \times B)\,.$$

Ljubljana, 10. januar 2005

IZPIT IZ TEORIJE MNOŽIC Z MATEMATIČNO LOGIKO

1. Poiščite sestavljeno izjavo $F(A, B, C)$, ki bo imela resničnostno tabelo

A	B	C	$F(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Izrazite $F(A, B, C)$ z ekvivalentno izjavo, ki ima dve implikaciji. Uporabite lahko oklepaje.

2. Dani sta množici

$$A = \{a, b, c\} \quad \text{in} \quad B = \{b, c, d\}\,.$$

Zapišite množice

$$A \cup B,\ A \cap B, \quad \text{in} \quad A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Nato zapišite potenčne množice vseh zgoraj nastopajočih množic in postavite znak $\bullet$, ki ga lahko izbirate v množici znakov $Z = \{=, \neq, \subseteq, \supseteq, \subset, \supset\}$ tako, da bodo pravilne naslednje relacije:

$$\mathcal{P}(A \cup B) \quad \bullet \quad \mathcal{P}A \cup \mathcal{P}B$$
$$\mathcal{P}(A \cap B) \quad \bullet \quad \mathcal{P}A \cap \mathcal{P}B$$
$$\mathcal{P}(A + B) \quad \bullet \quad \mathcal{P}A + \mathcal{P}B$$

3. Bodita R in T ekvivalenčni relaciji na množici S. Dokažite, da je $R \cap T$ tudi ekvivalenčna relacija na množici S.

4. Anketirali smo skupino 260 študentov in ugotovili, da so ob študiju vključeni v tri dejavnosti: v šport, v pevske zbore in v jezikovne tečaje. V športu jih sodeluje 64, pri pevskih zborih 94 in na jezikovne tečaje jih hodi 58. Izvedeli smo tudi, da 28 študentov sodeluje pri športu in hodi na jezikovne tečaje, 26 študentov sodeluje v športu in v pevskih zborih, 22 študentov pa sodeluje v pevskih zborih in hodi na jezikovne tečaje. Anketa pa je tudi pokazala, da 14 študentov sodeluje pri vseh treh dejavnostih hkrati. Koliko študentov iz skupine ne sodeluje pri nobeni od omenjenih treh dejavnosti? Koliko študentov iz skupine sodeluje samo v pevskih zborih?

Ljubljana, 1. februar 2005

2. KOLOKVIJ IZ TEORIJE MNOŽIC Z MATEMATIČNO LOGIKO

1. V neki knjižnici si izposoja matematične knjige 135 študentov, fizikalne knjige 73 študentov, leposlovne knjige pa 57 študentov. Matematične in fizikalne knjige si izposoja 39 študentov, matematične in leposlovne knjige 22 študentov, fizikalne in leposlovne pa 36 študentov. Matematične, fizikalne in leposlovne knjige hkrati pa si izposoja samo 12 študentov. Koliko študentov si izposoja samo matematične knjige? Koliko študentov si izposoja fizikalne knjige, ne pa leposlovnih?

2. Naj bo
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

množica naravnih števil. Dokazali smo, da je funkcija $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, ki je dana s predpisom

$$f(m,n) = m + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2},$$

bijekcija. Poiščite tak urejeni par $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, za katerega je $f(m,n) = 6666$. Za kontrolo rezultata naredite še preizkus.

3. Naj bo osnovna množica $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. V S vpeljemo binarno relacijo R takole:

$$(x,y)R(u,v) \Longleftrightarrow 2x - 3y = 2u - 3v .$$

Ali je R ekvivalenčna relacija? Če je, kaj so ekvivalenčni razredi po relaciji R in kaj je ustrezna faktorska množica?

4. Naj bo spet

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

množica naravnih števil. Dokažite, da je funkcija $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, ki je dana s predpisom

$$g(m,n) = 2^m(2n+1) - 1,$$

bijekcija. V kateri zvezi sta množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$? Poiščite tak urejeni par $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, za katerega je $g(m,n) = 2005$. Za kontrolo rezultata naredite še preizkus.

Ljubljana, 26. maj 2005

IZPIT IZ TEORIJE MNOŽIC Z MATEMATIČNO LOGIKO

1. V neki vasi živi 120 fantov, za katere so ugotovili, da v prostem času sodelujejo v treh dejavnostih: igrajo nogomet, hodijo k pevskemu zboru in so člani prostovoljnega gasilskega društva (PGD). Pri nogometu jih

tako ali drugače sodeluje 39, v pevskem zboru 44 in v PGD 51. Vemo tudi, da 28 fantov igra nogomet in poje v pevskem zboru, 26 fantov sodeluje v PGD in v pevskem zboru, 23 fantov je v PGD in igrajo nogomet. Izkazalo se je, da je 14 fantov hkrati nogometašev, gasilcev v PGD in pevcev v zboru. Koliko fantov ne sodeluje pri nobeni od omenjenih treh dejavnosti? Koliko fantov iz vasi sodeluje samo v PGD?

2. Poiščite sestavljeno izjavo $F(A, B, C)$, ki bo imela resničnostno tabelo

A	B	C	$F(A, B, C)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Izrazite $F(A, B, C)$ z ekvivalentno izjavo, ki ima konjunkcijo, ekvivalenco in negacijo. Uporabljate lahko oklepaje.

3. Naj bo osnovna množica $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. V S vpeljemo binarno relacijo R takole:

$$(x, y)R(u, v) \iff 3(x - u) = 4(y - v)\,.$$

Ali je R ekvivalenčna relacija? Če je, kaj so ekvivalenčni razredi po relaciji R in kaj je ustrezna faktorska množica?

4. Naj bo

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

množica naravnih števil. Dokažite, da je funkcija $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, ki je dana s predpisom

$$\psi(m,n) = 2^m(2n+1) - 1\,,$$

bijekcija. Kaj sta kardinalni števili množic $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$? Poiščite tak urejeni par $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, za katerega je $\psi(m,n) = 135$. Za kontrolo rezultata naredite še preizkus.

Ljubljana, 17. junij 2005

IZPIT IZ TEORIJE MNOŽIC Z MATEMATIČNO LOGIKO

1. V nekem mestu živi 600 upokojencev, ki v svojem prostem času obiskujejo največ tri jezikovne tečaje v okviru Društva upokojencev: 200 jih hodi na angleščino, 200 na nemščino in prav tako 200 na španščino. Na angleščino in nemščino jih hodi 110, na angleščino in španščino 70, na nemščino in španščino pa 90. Na vse tri jezikovne tečaje pa jih hodi 50. Koliko upokojencev hodi samo na nemščino? Koliko na noben od naštetih jezikovnih tečajev?

2. Poiščite tako sestavljeno izjavo $X = X(A,B)$, da bo sestavljena izjava

$$(A \Longleftrightarrow \neg B) \Longleftrightarrow X \wedge (\neg B \Longrightarrow A)$$

tavtologija.

3. Naj bo osnovna množica $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. V S vpeljemo binarno relacijo R takole:

$$(x,y)R(u,v) \Longleftrightarrow 2(x-u) = 7(y-v)\,.$$

Ali je R ekvivalenčna relacija? Če je, kaj so ekvivalenčni razredi po relaciji R in kaj je ustrezna faktorska množica?

4. Naj bo

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

množica naravnih števil. Poiščite vsaj eno funkcijo ψ, ki bijektivno preslika $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Kaj sta kardinalni števili množic $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$? Poiščite tak urejeno trojko $(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, za katero je $\psi(x, y, z) = 365$. Za kontrolo rezultata naredite še preizkus.

Ljubljana, 16. september 2005

22 Hebrejska abeceda

א alef	מ mem
ב bet	ן finalnun
ג gimel	נ nun
ד dalet	ס samekh
ה he	ע ayin
ו vav	ף finalpe
ז zayin	פ pe
ח het	ץ finaltsadi
ט tet	צ tsadi
י yod	ק qof
ך finalkaf	ר resh
כ kaf	ש shin
ל lamed	ת tav
ם finalmem	

Vir

N. Prijatelj, *Matematične strukture I*, MK, Ljubljana 1964.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

510.6(075.8)(079.1)
510.22(075.8)(079.1)

RAZPET, Marko
Teorija množic z matematično logiko [Elektronski vir] : študijsko gradivo / Marko Razpet. - Besedilni podatki. - [Domžale : samozal.], 2006

Način dostopa (URL): `http://javor.pef.uni-lj.si/~marko/matematika/gradivo.pdf`. - Opis temelji na verziji z dne 10.02.2006

ISBN 961-6589-22-9

225019392