

Marko Razpet

Besselove funkcije kot integrali s parametrom

Študijsko gradivo

Besselovo funkcijo $J_n(x)$ celoštevilskega indeksa n lahko definiramo kot integral s parametrom x z izrazom:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) d\phi.$$

Nekaj lastnosti preverimo brez težav:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x), \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Obe navedeni enakosti preverimo z uvedbo nove integracijske spremenljivke $\theta = \pi - \phi$. Prvo enakost preverimo takole:

$$\begin{aligned} J_n(-x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi + x \sin \phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\pi - n\theta + x \sin(\pi - \theta)) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\pi - (n\theta - x \sin \theta)) d\theta = (-1)^n \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Drugo enakost preverimo podobno:

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-n\phi - x \sin \phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(-n\pi + n\theta - x \sin(\pi - \theta)) d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos((n\theta - x \sin \theta) - n\pi) d\theta = (-1)^n \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta = (-1)^n J_n(x). \end{aligned}$$

Tri zaporedne Besselove funkcije $J_{n-1}(x)$, $J_n(x)$ in $J_{n+1}(x)$ povezujeta enakosti

$$x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = 2nJ_n(x), \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x).$$

Preverimo ju s faktorizacijo vsote in razlike kosinusov pod integralskim znakom:

$$x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\cos((n-1)\phi - x \sin \phi) + \cos((n+1)\phi - x \sin \phi)) d\phi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) \cos \phi \, d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) (x \cos \phi - n) \, d\phi + \\
&\quad + \frac{2n}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) \, d\phi = 2nJ_n(x),
\end{aligned}$$

ker je predzadnji integral enak 0, kar dobimo takoj s substitucijo $u = n\phi - x \sin \phi$, $du = (n - x \cos \phi) \, d\phi$ v integral.

Za odvod Besselove funkcije $J_n(x)$ dobimo po pravilu za odvajanje pod integralnim znakom:

$$J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\phi - x \sin \phi) \sin \phi \, d\phi.$$

S tem rezultatom lahko nadaljujemo:

$$\begin{aligned}
J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((n-1)\phi - x \sin \phi) - \cos((n+1)\phi - x \sin \phi)) \, d\phi = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\phi - x \sin \phi) \sin \phi \, d\phi = J'_n(x).
\end{aligned}$$

Besselova funkcija $J_n(x)$ je ena od rešitev Besselove diferencialne enačbe:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Prvi odvod že imamo. Spotoma ga še preoblikujemo z metodo per partes:

$$\begin{aligned}
J'_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\phi - x \sin \phi) \sin \phi \, d\phi = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) (n - x \cos \phi) \cos \phi \, d\phi.
\end{aligned}$$

Drugi odvod dobimo iz prve oblike za prvi odvod:

$$J''_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) \sin^2 \phi \, d\phi.$$

Ko vse zložimo skupaj, dobimo:

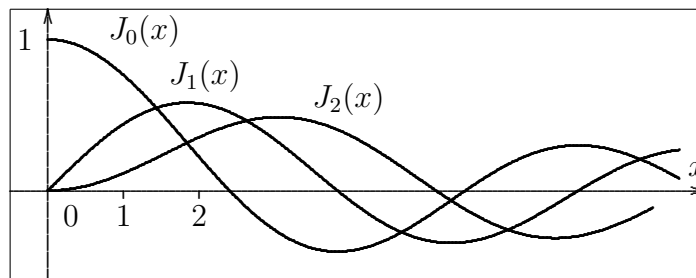
$$x^2 J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) (-x^2 \sin^2 \phi + nx \cos \phi - x^2 \cos^2 \phi + x^2 - n^2) d\phi = \\
&= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x \sin \phi) (x \cos \phi - n) d\phi = 0.
\end{aligned}$$

Čisto v zadnjem integralu spet uporabimo substitucijo $u = n\phi - x \sin \phi$. Vse Besselove funkcije $J_n(x)$ imajo v točki $x = 0$ vrednost 0 razen J_0 , ki ima tam vrednost 1. To lahko izrazimo s Kroneckerjevim simbolom:

$$J_n(0) = \delta_{n,0}.$$

Grafi prvih treh Besselovih funkcij so na sliki.



CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.923

RAZPET, Marko

Besselove funkcije kot integrali s parametrom [Elektronski vir] :
študijsko gradivo / Marko Razpet. - Besedilni podatki. - [Domžale
: samozal.], 2006

Način dostopa (URL): http://javor.pef.uni-lj.si/~marko/matematika/bess_fun.pdf. - Opis temelji na verziji z dne 10.02.2006

ISBN 961-6589-25-3

225020416
