Univerza v Ljubljani

Pedagoška fakulteta

Oddelek za matematiko in računalništvo

Marko Razpet

FUNKCIJA LOBAČEVSKEGA

Študijsko gradivo

Zgodovina matematike

Ljubljana, januar 2013

Vsebina

Predgovor

V pričujočem kratkem gradivu bomo poskusili predstaviti nekaj zanimivosti v zvezi s funkcijo Lobačevskega. Pri zgodovini matematike navadno Lobačevskega omenjamo v zvezi z neevklidsko geometrijo, pri čemer ne moremo mimo madžarskega matematika Jánosa Bolyaija (1802–1860) in njegovega očeta Farkasa Bolyaija (1775–1856) ter samega Carla Friedricha Gaußa (1777–1855). Za vse je pravzaprav kriv Evklid (360–280) s svojim *petim postulatom* ali *aksiomom o vzporednici* v znamenitih *Elementih*. Originalno je peti postulat zapleteno povedan, zato so našli bolje razumljivo in logično enakovredno dikcijo:

Skozi vsako točko T, ki ne leži na premici p, poteka natančno ena vzporednica k premici p.

Slika 1. Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792–1856).

Nikolaj Ivanovič Lobačevski, rusko Николай Иванович Лобачевский, se je rodil 1. decembra 1792 (po starem ruskem koledarju 10. novembra) v Nižnem Novgorodu (Нижний Новгород). Šolal se je na gimnaziji v Kazanu

(Казань), kjer se je vpisal tudi na univerzo, na kateri je najprej študiral kemijo in farmakologijo, nato pa matematiko, fiziko in astronomijo. Njegov profesor matematike je bil Johann Christian Martin Bartels (1769–1833), tudi Gaußov učitelj in prijatelj. Lobačevski je 1811 magistriral iz matematike in fizike, tri leta kasneje je začel predavati na kazanski univerzi, leta 1822 pa je postal že redni profesor. Bil je tudi dekan fakultete za fiziko in matematiko, direktor univerzitetne knjižnice in rektor univerze. Prejel je več odlikovanj in celo plemiški naslov.

Ker se je zdel matematikom peti Evklidov postulat že od nekdaj sumljiv, so ga skušali dokazati s preostalimi postulati v Elementih, toda zaman. Začeli pa so razmišljati drugače in prišli do sklepa, da je peti postulat pravzaprav neodvisen od ostalih. Vprašali so se, kaj se zgodi, če peti postulat zanikamo:

Skozi točko T, ki ne leži na premici p, poteka več kot ena vzporednica k premici p.

Tako sta neodvisno eden od drugega razmišljala János Bolyai in Lobačevski. S tem se je rodila hiperbolična geometrija, ki je neevklidska. Gauß je za Madžarovo odkritje vedel, a ni želel tega razbobnati, ker se je verjetno bal reakcije kolegov. Rus pa je že leta 1826 imel pripravljen članek za objavo, a objavljen ni bil. Vsebino je vključil v obsežnejši članek *O osnovah geometrije* (О началах геометрии, v stari ruščini О началахъ геометрiи), ki je bil objavljen v Kazanskem vestniku (Казанский вестник, v stari ruščini Казанскiй вѣстникъ издаваемый при императорскомъ Казанскомъ университетѣ) za akademsko leto 1829/30. Prav ta članek imajo za prvo znanstveno objavo, v kateri je govora o neevklidski geometriji, ki jo je Lobačevski poimenoval *imaginarna geometrija*, rusko Воображаемая геометрия, francosko *Géométrie imaginaire*. János pa je objavil svoje ugotovitve v neevklidski geometriji kot dodatek v očetovem delu *Tentament*, ki je izšlo leta 1832 in je prišlo v roke tudi Gaußu, ki pa ni storil drugega kot to, da je prispevek pohvalil, ni se pa hotel izjasniti, kdo je prvi odkril neevklidsko geometrijo. V velikem razočaranju János ni od takrat objavil ničesar več s področja matematike.

Lobačevski je umrl popolnoma slep 24. februarja 1856 (po starem ruskem koledarju 12. februarja) v Kazanu.

Druga možnost zanikanja Evklidovega petega postulata pa se glasi:

Skozi točko T, ki ne leži na premici p, ne poteka nobena vzporednica k premici p.

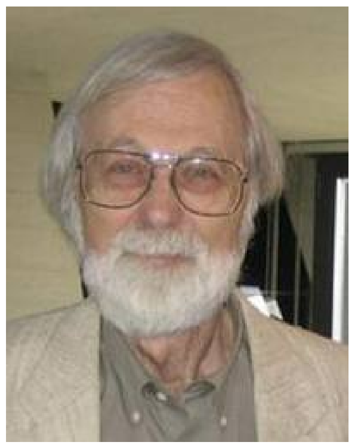
Na tako spremenjenem postulatu sloni *eliptična geometrija*, ki je tudi neevklidska.

Ljubljana, januar 2013 — Dr. Marko Razpet

1 Uvod

Ruski matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevski se je sistematično ukvarjal s hiperbolično geometrijo, pri kateri je med drugim uporabljal neelementarno funkcijo L, definirano s predpisom

$$L(\vartheta) = -\int_0^{\vartheta} \ln(\cos\varphi)\; d\varphi\,. \tag{1}$$



Slika 2. John Willard Milnor.

Leta 1979 je John Willard Milnor (rojen 1931, Abelov nagrajenec za leto 2011) vpeljal nekoliko bolj pripravno funkcijo

$$Л(\vartheta) = -\int_0^{\vartheta} \ln|2\sin\varphi|\; d\varphi\,. \tag{2}$$

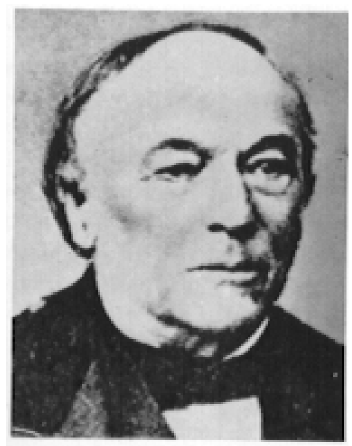
Ravno Lobačevskemu v čast jo je označil z cirilsko črko Л (glej na primer [3]). V literaturi jo nekateri raje označujejo z grško črko Λ. Obe funkciji sta povezani z relacijo

$$Л(\vartheta) = -L(\pi/2-\vartheta) + (\pi/2-\vartheta)\ln 2\,, \quad 0 \le \vartheta \le \pi/2\,.$$

Milnorjeva funkcija Lobačevskega je v tesni povezavi s Clausenovim integralom

$$\mathrm{Cl}_2(\vartheta) = -\int_0^{\vartheta} \ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| \, d\varphi\,, \tag{3}$$

saj očitno velja enakost $\mathrm{Cl}_2(2\vartheta) = 2Л(\vartheta)$. Thomas Clausen je med drugim raziskoval stabilnost Sončevega sistema ter Bernoullijeva števila ter pravilno izračunal število π na 248 decimalk.



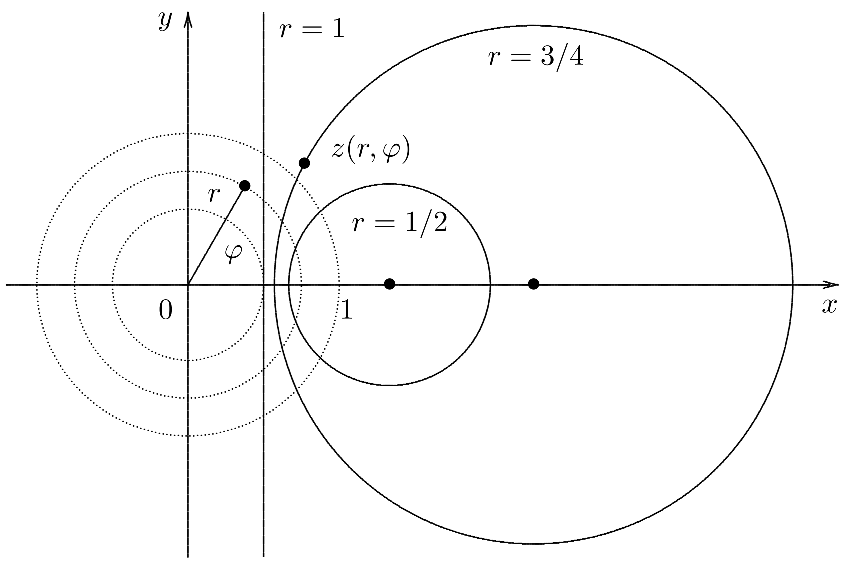
Slika 3. Thomas Clausen (1801–1885).

2 Zapis funkcije Lobačevskega s Fourierovo vrsto

Funkcijo Lobačevskega bomo obravnavali na kar se da preprost način, in sicer z uporabo potenčnih in Fourierovih vrst ter kompleksnih števil. V ta namen si najprej oglejmo kompleksno število

$$z(r,\varphi) = \frac{1}{1 - re^{i\varphi}} = \frac{1 - r\cos\varphi + ir\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}\,, \quad 0 < \varphi < 2\pi\,, 0 < r < 1\,. \tag{4}$$

Kratek račun pokaže, da v ravnini kompleksnih števil točka $z(r,\varphi)$ potuje po krožnici $\mathcal{K}_r$ polmera $r/(1-r^2)$ in s središčem v točki $1/(1-r^2)$, in sicer v pozitivni smeri od točke $1/(1-r)$ prek točke $1/(1+r)$ nazaj proti točki $1/(1-r)$, ko kot φ spreminjamo od 0 do 2π. Zato je pri tem vedno kot $\alpha = \arg z(r,\varphi)$ v mejah med $-\pi/2$ in $\pi/2$.



Slika 4. Števili $e^{i\varphi}$ in $z(r,\varphi)$.

Absolutna vrednost kompleksnega števila $z(r,\varphi)$ je

$$|z(r,\varphi)| = \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\varphi + r^2}}\,, \tag{5}$$

argument $\alpha(r,\varphi)$ pa je dan z izrazom

$$\alpha(r,\varphi) = \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi}\,. \tag{6}$$

Zato je

$$\ln z(r,\varphi) = \ln|z(r,\varphi)| + i\alpha(r,\varphi)\,. \tag{7}$$

Izbrali smo tisto vejo kompleksnega logaritma $z \mapsto \ln z$, ki ima za pozitivne spremenljivke z realne vrednosti.

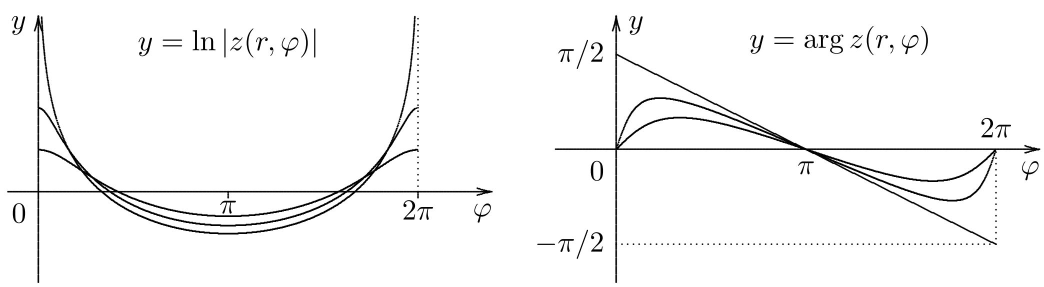
Oglejmo si še mejni primer $r = 1$. Tedaj točke $z(1, \varphi)$ ležijo na premici $\operatorname{Re} z = 1/2$ in $\operatorname{Im} z(1, \varphi) \to \infty$, ko $\varphi \to 0$, in $\operatorname{Im} z(1, \varphi) \to -\infty$, ko $\varphi \to 2\pi$. Zato veljata tudi enakosti

$$\ln |z(1, \varphi)| = -\ln \left(2 \sin \frac{\varphi}{2}\right) , \quad \alpha(1, \varphi) = \frac{\pi - \varphi}{2} , \tag{8}$$

in za $0 < r \leq 1$ enakost

$$\ln z(r, \varphi) = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2r \cos \varphi + r^2) + i \operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin \varphi}{1 - r \cos \varphi} \tag{9}$$

pri pogoju $0 < \varphi < 2\pi$:



Slika 5. Funkciji $\varphi \mapsto \ln |z(r, \varphi)|$ in $\varphi \mapsto \arg z(r, \varphi)$ za $r = 1/2, 3/4, 1$.

Iz znanega razvoja

$$\ln \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} , \quad |z| < 1 , \tag{10}$$

dobimo v primeru $0 < r < 1$ za kompleksno število $z = re^{i\varphi}$, za katero je tedaj izpolnjen pogoj $|z| < 1$, naslednji razvoj:

$$\ln z(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n e^{in\varphi}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(n\varphi)}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(n\varphi)}{n} . \tag{11}$$

Zapisa (9) in (11) kompleksnega števila $\ln z(r,\varphi)$ dasta po primerjavi realnih in imaginarnih delov razvoja v Fourierovo vrsto:

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\varphi+r^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos(n\varphi)}{n}\,, \quad 0<\varphi<2\pi\,, \tag{12}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin\varphi}{1-r\cos\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\sin(n\varphi)}{n}\,, \quad 0<\varphi<2\pi\,. \tag{13}$$

Sedaj je treba razmisliti, kako je v mejnem primeru $r\to 1_{-0}$. Uporabimo znana izreka iz teorije vrst, ki ju dobimo na primer v [6]. Prvi pove, da vrsti $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\varphi)$ in $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(n\varphi)$ konvergirata pri pogoju $0<\varphi<2\pi$, če je zaporedje $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ pozitivnih števil padajoče z limito 0. Če vzamemo $a_n = r^n/n$, vidimo, da vrsti v razvoju $\ln z(r,\varphi)$ konvergirata pri pogojih $0<r\le 1$ in $0<\varphi<2\pi$. Če ima realna potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ konvergenčni polmer 1 in vsoto $f(x)$ za $-1<x<1$ in če konvergira vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ k vsoti s, potem je po znanem izreku $\lim_{x\to 1_{-0}}f(x)=s$. Če gledamo na vrsti v razvoju $\ln z(r,\varphi)$ kot na potenčni vrsti spremenljivke r in vzamemo za koeficiente c_n kar $\cos(n\varphi)/n$ oziroma $\sin(n\varphi)/n$, lahko sklepamo, da za $0<\varphi<2\pi$ veljata razvoja v Fourierovo vrsto:

$$-\ln\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\varphi)}{n}\,, \quad 0<\varphi<2\pi\,, \tag{14}$$

$$\frac{\pi-\varphi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\varphi)}{n}\,, \quad 0<\varphi<2\pi\,. \tag{15}$$

Na podoben način ali pa še krajše, z zamenjavo $\varphi\to\pi-\varphi$, dobimo:

$$\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\varphi)}{n}\,, \quad -\pi<\varphi<\pi\,, \tag{16}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\varphi)}{n}\,, \quad -\pi<\varphi<\pi\,. \tag{17}$$

Očitno veljata zaradi periodičnosti trigonometričnih funkcij splošnejša razvoja v Fourierovi vrsti:

$$-\ln\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\varphi)}{n}\,, \quad \varphi \neq 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,, \tag{18}$$

$$\ln\left|2\cos\frac{\varphi}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(n\varphi)}{n}\,, \quad \varphi \neq (2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,. \tag{19}$$

Iz zapisa $\ln|\mathrm{ctg}(\varphi/2)| = \ln|2\cos(\varphi/2)| - \ln|2\sin(\varphi/2)|$ imamo takoj še Fourierov razvoj:

$$\ln\left|\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}\right| = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)\varphi)}{2n-1}\,, \quad \varphi \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,. \tag{20}$$

Naredimo v (18) zamenjavo $\varphi \to 2\varphi$ in dobimo razvoj:

$$-\ln|2\sin\varphi| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\varphi)}{n}\,, \quad \varphi \neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,. \tag{21}$$

Hitro se da videti, da ima funkcija $\varphi \mapsto -\ln|2\sin\varphi|$ osnovno periodo $T=\pi$ in za vsak realen ϑ integral

$$-\int_0^{\vartheta}\ln|2\sin\varphi|\;d\varphi\,,$$

ki definira neelementarno funkcijo Lobačevskega Л. Po integraciji obeh strani v (21) dobimo njen razvoj v Fourierovo vrsto:

$$\text{Л}(\vartheta) = -\int_0^{\vartheta}\ln|2\sin\varphi|\;d\varphi = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\vartheta)}{n^2}\,. \tag{22}$$

Dobro je namreč znano (glej na primer [6]), da obstaja integral

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2\,,$$

izračuna pa se ga po precej nestandardni poti, z malimi triki.

3 Lastnosti

Nova funkcija Л je očitno definirana na vsej realni osi, je liha in ima osnovno periodo $T = \pi$:

$$Л(-\vartheta) = -Л(\vartheta)\,, \quad Л(\vartheta + \pi) = Л(\vartheta)\,. \tag{23}$$

Funkcija Л ima trivialno ničlo v točki $\vartheta = 0$, prvo pozitivno ničlo pa v točki $\vartheta = \pi/2$, kar vidimo iz zapisa funkcije Л v Fourierovo vrsto ali pa neposredno po definiciji:

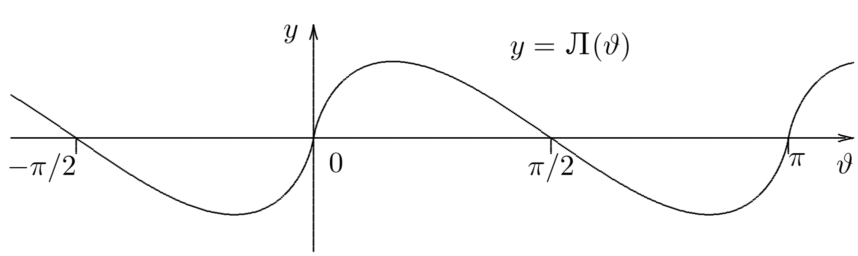
$$Л(\pi/2) = -\int_0^{\pi/2} \ln\left(2\sin\varphi\right)\, d\varphi = -\ln 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi - \int_0^{\pi/2} \ln\left(\sin\varphi\right)\, d\varphi =$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}\ln 2 = 0\,.$$

Ker je funkcija Л periodična z osnovno periodo π, ima ničle pri vseh celih mnogokratnikih števila $\pi/2$:

$$Л(0) = Л(\pm\pi/2) = Л(\pm\pi) = Л(\pm 3\pi/2) = \ldots = 0\,. \tag{24}$$

Lokalne ekstreme dobimo iz pogoja stacionarnosti $Л'(\vartheta) = -\ln|2\sin\vartheta| = 0$. V točkah $\vartheta = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ima lokalne maksimume, v točkah $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ pa lokalne minimume. Pri tem je n poljubno celo število.



Slika 6. Graf funkcije $\vartheta \mapsto Л(\vartheta)$.

Pri $\vartheta = \pi/4$ dobimo:

$$Л(\pi/4) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx\,.$$

Z uvedbo tako imenovane *Catalanove konstante*

$$\mathbf{G} = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\,dx = 0.915965\ldots$$

lahko zapišemo:

$$Л(\pi/4) = \frac{1}{2}\mathbf{G}\,.$$

Funkcija $Л(\vartheta)$ zadošča funkcijski enačbi:

$$Л((\pi - \vartheta)/2) = Л(\vartheta/2) - \frac{1}{2}Л(\vartheta)\,. \tag{25}$$

Veljata namreč enakosti

$$Л((\pi - \vartheta)/2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n(\pi - \vartheta))}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(n\vartheta)}{n^2}\,,$$

$$Л(\vartheta/2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\vartheta)}{n^2}\,,$$

ki nam dasta:

$$Л((\pi - \vartheta)/2) - Л(\vartheta/2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n+1} - 1]\frac{\sin(n\vartheta)}{n^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\vartheta)}{n^2} = -\frac{1}{2}Л(\vartheta)\,.$$

Z zamenjavo $\vartheta \to -2\vartheta$ dobimo iz funkcijske enačbe (25):

$$Л(\pi/2 + \vartheta) = Л(-\vartheta) - \frac{1}{2}Л(-2\vartheta)\,.$$

Ker je funkcija $Л(\vartheta)$ liha, imamo takoj

$$Л(\pi/2+\vartheta) = -Л(\vartheta) + \frac{1}{2}Л(2\vartheta)$$

oziroma

$$Л(2\vartheta) = 2(Л(\vartheta) + Л(\vartheta+\pi/2))\,. \tag{26}$$

Predvidevamo, da bo za vsako naravno število m veljala še splošnejša formula:

$$Л(m\vartheta) = m[Л(\vartheta) + Л(\vartheta+\pi/m) + \ldots + Л(\vartheta+(m-1)\pi/m)]\,. \tag{27}$$

Bodita m in n naravni števili. Izračunajmo

$$\sin(2n\vartheta) + \sin(2n\vartheta + 2n\pi/m) + \ldots + \sin(2n\vartheta + 2(m-1)n\pi/m)\,. \tag{28}$$

Če število m deli število n, potem so očitno vsi členi med seboj enaki $\sin(2n\vartheta)$ in vsota je enaka $m\sin(2n\vartheta)$. V nasprotnem primeru pa zgornjo vsoto zapišemo kot imaginarni del kompleksne vsote

$$e^{2ni\vartheta} + e^{2ni\vartheta+2ni\pi/m} + e^{2ni\vartheta+4ni\pi/m} + \ldots + e^{2ni\vartheta+2(m-1)ni\pi/m} =$$

$$= e^{2ni\vartheta}\left(1 + e^{2ni\pi/m} + e^{4ni\pi/m} + \ldots + e^{2(m-1)ni\pi/m}\right) =$$

$$= e^{2ni\vartheta}\frac{1-e^{(2ni\pi/m)\cdot m}}{1-e^{2ni\pi/m}} = e^{2ni\vartheta}\frac{1-e^{2ni\pi}}{1-e^{2ni\pi/m}} = 0\,.$$

Vsota (28) je enaka $m\sin(2n\vartheta)$, če m deli n, in 0 sicer. Torej lahko izrazimo:

$$\sum_{k=0}^{m-1} Л(\vartheta + k\pi/m) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n\vartheta+2nk\pi/m)}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{m-1}\sin(2n\vartheta+2nk\pi/m) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(rm)^2} \cdot m \sin(2mr\vartheta) = \frac{1}{2m} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin(2mr\vartheta)}{r^2} = \frac{1}{m} Л(m\vartheta)\,.$$

Upoštevali smo tiste člene, pri katerih je n deljiv z m. Preostali so enaki nič.

Tako smo izpeljali enakost:

$$Л(m\vartheta) = m \sum_{k=0}^{m-1} Л(\vartheta + k\pi/m)\,,\ m \in \mathbb{N}\,. \tag{29}$$

Dokažimo za vajo, da velja:

$$3Л(\pi/3) = 2Л(\pi/6)\,.$$

Najprej imamo:

$$Л(2\pi/3) = 2Л(\pi/3) + 2Л(\pi/3 + \pi/2) = 2Л(\pi/3) + 2Л(5\pi/6) =$$

$$= 2Л(\pi/3) + 2Л(5\pi/6 - \pi) = 2Л(\pi/3) - 2Л(\pi/6)\,.$$

Velja pa tudi:

$$Л(3\pi/3) = 3Л(\pi/3) + 3Л(\pi/3 + \pi/3) + 3Л(\pi/3 + 2\pi/3) =$$

$$= 3Л(\pi/3) + 3Л(2\pi/3) + 3Л(\pi) = 3Л(\pi/3) + 3(2Л(\pi/3) - 2Л(\pi/6)) =$$

$$= 9Л(\pi/3) - 6Л(\pi/6) = 0\,.$$

It tega sledi po krajšanju s 3 zveza $3Л(\pi/3) = 2Л(\pi/6)$.

Izračunajmo

$$\int_0^{\vartheta} Л(\theta)\,d\theta\,.$$

Dobimo:

$$\int_0^{\vartheta} Л(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\theta)}{n^2}\,d\theta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\vartheta} \sin(2n\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(1-\cos(2n\vartheta)) = \frac{1}{4}\zeta(3) - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\vartheta)}{n^3}\,.$$

Pri tem je $s \mapsto \zeta(s)$ znana *Riemannova funkcija*.

Funkcija Л je na intervalu $(0, \pi)$ dvakrat odvedljiva:

$$Л'(\vartheta) = -\ln(2\sin\vartheta)\,, \quad Л''(\vartheta) = -\operatorname{ctg}\vartheta\,.$$

4 Bernoullijeva števila

Razvoj funkcije Л v potenčno vrsto bomo zapisali z *Bernoullijevimi števili* B_n (več v [1, 2]), ki so definirana z rodovno funkcijo

$$\frac{z}{\exp(z)-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\,, \quad |z| < 2\pi\,.$$

Če razvijemo $\exp(z) - 1$ v potenčno vrsto in z njo pomnožimo obe strani zgornje enakosti ter primerjamo koeficiente na obeh straneh dobljene enakosti, hitro najdemo nekaj prvih Bernoullijevih števil:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0\,.$$

Bernoullijeva števila so dobila ime po Jakobu Bernoulliju (1654–1705).

Poleg tega pa najdemo tudi rekurzivno zvezo, ki jo za vsako celo število $n > 0$ zapišemo simbolično:

$$B^{n+1} = (1+B)^{n+1}\,, \quad B^k \equiv B_k\,.$$

To pomeni, da formalni binom $1+B$ potenciramo po binomski formuli, potem pa eksponente zamenjamo z indeksi, na primer:

$$B^5 = (1+B)^5 = 1 + 5B^1 + 10B^2 + 10B^3 + 5B^4 + B^5\,,$$

$$B_5 = 1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 + B_5\,,$$

$$1 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0\,.$$

Iz znanih B_1, B_2 in B_3 izračunamo $B_4 = -1/30$. Tako korak za korakom izračunamo poljubno dolgo zaporedje Bernoullijevih števil.

Ker je funkcija $z \mapsto z/(\exp(z) - 1) + z/2$ soda, sledi iz razvoja

$$\frac{z}{\exp(z)-1} - B_1 z = \frac{z}{\exp(z)-1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n\,,$$

da so vsa Bernoullijeva števila lihega indeksa od vključno tretjega naprej enaka 0: $B_{2n+1} = 0$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$

Po preureditvi lahko zapišemo

$$\frac{z}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{za} \quad |z| < 2\pi\,.$$

Po zamenjavi spremenljivke $z \to 2z$ pa še:

$$z\,\mathrm{cth}\,z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}\,, \quad |z| < \pi\,.$$

Ker velja preprosta enakost $\mathrm{cth}\,iz = -i\,\mathrm{ctg}\,z$, dobimo z zamenjavo $z \to iz$:

$$z\,\mathrm{ctg}\,z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}\,, \quad |z| < \pi\,. \tag{30}$$

Iz elementarne enakosti $2\,\mathrm{ctg}(2z) = \mathrm{ctg}\,z - \mathrm{tg}\,z$ pridemo tudi do razvoja:

$$\mathrm{tg}\,z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}\,, \quad |z| < \pi/2\,. \tag{31}$$

Iz razvoja (30) lahko sedaj poiščemo razvoj funkcije Л v vrsto, ki bo vsota logaritemskega člena in potenčne vrste. Najprej prepišimo:

$$\vartheta\,\mathrm{ctg}\,\vartheta = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \vartheta^{2n}\,.$$

S tem imamo

$$Л''(\vartheta) = -\operatorname{ctg}\vartheta = -\frac{1}{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\vartheta^{2n-1}\,, \quad 0 < \vartheta < \pi\,.$$

S prvo integracijo dobimo:

$$Л'(\vartheta) = -\ln(2\sin\vartheta) = -\ln\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)(2n)!}\vartheta^{2n} + C\,, \quad 0 < \vartheta < \pi\,.$$

Pri tem je C integracijska konstanta. Torej velja tudi razvoj

$$\ln\frac{\vartheta}{2\sin\vartheta} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)(2n)!}\vartheta^{2n} + C\,, \quad 0 < \vartheta < \pi\,.$$

V limiti $\vartheta \to 0$ dobimo:

$$\ln\frac{1}{2} = C\,.$$

Tako smo našli: $C = -\ln 2$. Zato velja razvoj:

$$Л'(\vartheta) = -\ln 2 - \ln\vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)(2n)!}\vartheta^{2n}\,, \quad 0 < \vartheta < \pi\,.$$

Z drugo integracijo dobimo pri pogoju $0 < \vartheta < \pi$:

$$Л(\vartheta) = -\vartheta\ln 2 - \vartheta\ln\vartheta + \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)(2n+1)(2n)!}\vartheta^{2n+1} + D\,.$$

Pri tem je D druga integracijska konstanta. V limiti $\vartheta \to 0$ dobimo $D = 0$ in tako imamo končno pri pogoju $0 < \vartheta < \pi$:

$$Л(\vartheta) = -\vartheta\ln(2\vartheta) + \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)(2n+1)!}\vartheta^{2n+1}\,. \tag{32}$$

Sedaj bomo razvili v potenčno vrsto še funkcijo f, ki je dana s predpisom

$$f(\vartheta) = Л(\pi/2 - \vartheta)\,.$$

Očitno imamo sedaj za $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$:

$$f'(\vartheta) = -Л'(\pi/2 - \vartheta) = \ln(2\cos\vartheta)\,, \quad f''(\vartheta) = -\operatorname{tg}\vartheta\,.$$

Iz znanega razvoja (31) imamo sedaj:

$$f''(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}\vartheta^{2n-1}\,, \quad |\vartheta| < \pi/2$$

Za funkcijo $f(\vartheta)$ veljata začetna pogoja $f(0) = 0$ in $f'(0) = \ln 2$, zato z dvema zaporednima integracijama dobimo pri pogoju $|\vartheta| < \pi/2$:

$$Л(\pi/2 - \vartheta) = \theta \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)(2n+1)!}\vartheta^{2n+1}\,. \tag{33}$$

5 Primer uporabe

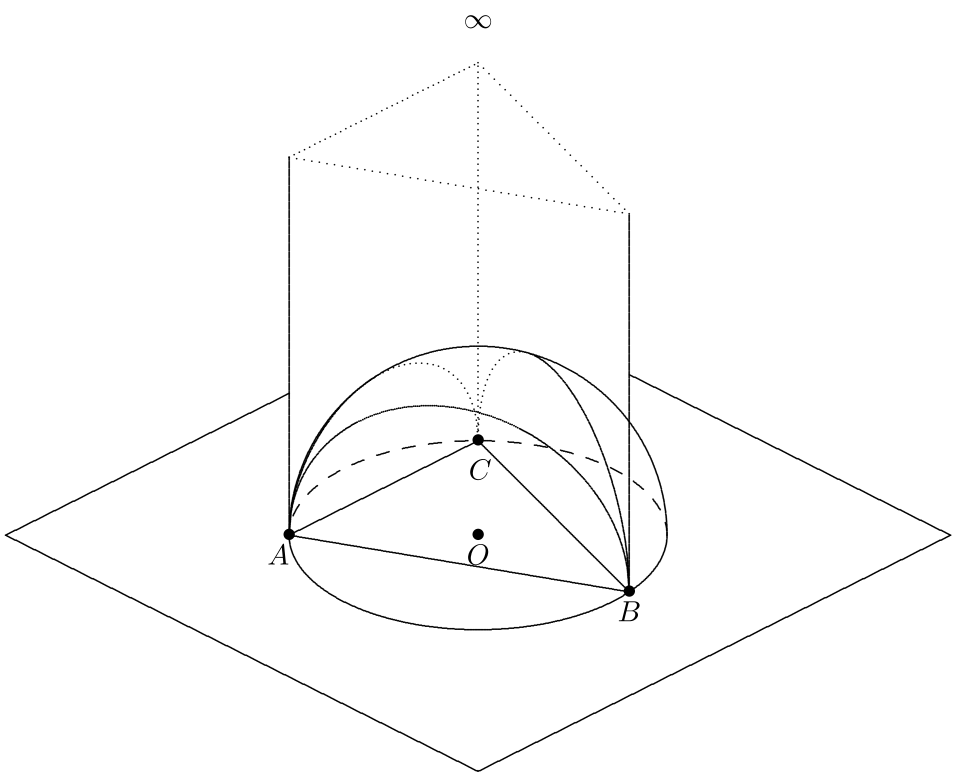
Izračunajmo prostornino V tako imenovanega *idealnega tetraedra* v hiperboličnem trirazsežnem prostoru $\mathbb{H}^3$. Model za $\mathbb{H}^3$ lahko realiziramo kot zgornji polprostor $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ v prostoru $\mathbb{R}^3$. Točke v $\mathbb{H}^3$ so urejene trojke (x, y, z), kjer sta x in y realni števili, z pa pozitivno število. Premice v $\mathbb{H}^3$ so bodisi običajni poltrakovi, pravokotni na ravnino $z = 0$, ali pa običajne polkrožnice, ki so v svojih krajiščih pravokotne na to ravnino. Ravnine v $\mathbb{H}^3$ so bodisi običajne polravnine, ki so pravokotne na ravnino $z = 0$, bodisi običajne polsfere s svojim robom v tej ravnini. Metrika v prostoru $\mathbb{H}^3$ je opredeljena s kvadratom diferenciala loka:

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2 + dz^2)/z^2.$$

Iz tega sledi izraz za diferencial prostornine:

$$dV = dx\,dy\,dz/z^3.$$

Izračunali bomo prostornino tako imenovanega *idealnega hiperboličnega tetraedra* v $\mathbb{H}^3$ s tremi oglišči na ravnini $z = 0$ in s četrtim ogliščem v točki ∞ (slika 7).



Slika 7. Idealni hiperbolični tetraeder.

Izračunajmo najprej prostornino V_1 hiperboličnega tetraedra, ki je v $\mathbb{H}^3$ omejen s hiperboličnimi ravninami $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (evklidska polsfera), $y = 0, x = \cos\alpha$ in $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Pri tem je $0 < \alpha < \pi/2$.

Pravokotna projekcija našega tetraedra, ki ima oglišča v točkah $(0, 0, 1)$, $(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$, $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ in ∞, na ravnino $z = 0$, je trikotnik $\mathcal{D}$ (slika 8). Prostornino V_1 brez težav izrazimo v obliki:

$$V_1 = \int_{\mathcal{D}} dS \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \frac{dS}{1 - x^2 - y^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\cos\alpha} dx \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{1 - x^2 - y^2} \,.$$

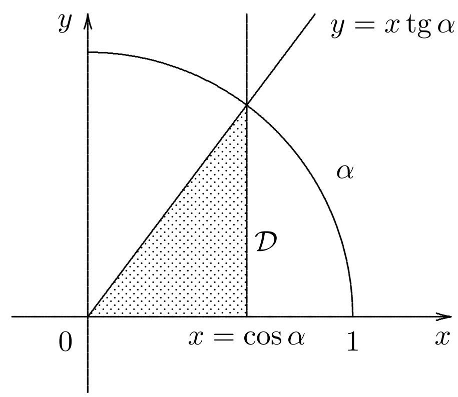
Zapišimo posebej notranji integral:

$$\int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{dy}{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \frac{(\sqrt{1-x^2}-y)+(\sqrt{1-x^2}+y)}{(\sqrt{1-x^2}+y)(\sqrt{1-x^2}-y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+y} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}-y} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y} \Bigg|_{y=0}^{y=x \operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}+x \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1-x^2}-x \operatorname{tg} \alpha}\, .$$



Slika 8. Integracija po osnovnem trikotniku $\mathcal{D}$.

Torej se prostornina našega telesa izraža v obliki:

$$V_1 = \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \ln \frac{\sqrt{1-x^2}+x \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1-x^2}-x \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, .$$

Sedaj vpeljemo v dobljeni integral novo integracijsko spremenljivko z relacijo $x = \cos u$:

$$4V_1 = \int_\alpha^{\pi/2} \ln \frac{\sin u + \cos u \operatorname{tg} \alpha}{\sin u - \cos u \operatorname{tg} \alpha}\, du = \int_\alpha^{\pi/2} \ln \frac{\sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha}{\sin u \cos \alpha - \cos u \sin \alpha}\, du\, .$$

Uporabimo adicijska izreka, pa dobimo:

$$4V_1 = \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln \frac{\sin(u+\alpha)}{\sin(u-\alpha)}\, du = \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln(2\sin(u+\alpha))\, du - \int_{\alpha}^{\pi/2} \ln(2\sin(u-\alpha))\, du =$$

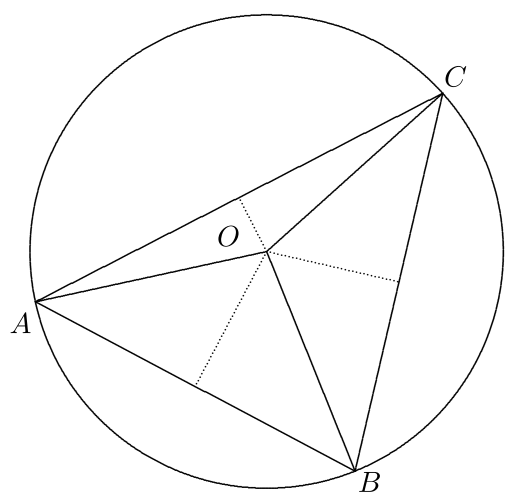
$$= \int_{2\alpha}^{\pi/2+\alpha} \ln(2\sin\varphi)\, d\varphi - \int_{0}^{\pi/2-\alpha} \ln(2\sin\psi)\, d\psi =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2+\alpha} \ln(2\sin\varphi)\, d\varphi - \int_{0}^{2\alpha} \ln(2\sin\varphi)\, d\varphi - \int_{0}^{\pi/2-\alpha} \ln(2\sin\psi)\, d\psi =$$

$$= -Л(\pi/2+\alpha) + Л(2\alpha) + Л(\pi/2-\alpha) = -Л(\pi/2+\alpha) + Л(2\alpha) - Л(\alpha-\pi/2+\pi) =$$

$$= -2Л(\pi/2+\alpha) + Л(2\alpha) = 2Л(\alpha)\,.$$

Upoštevali smo identiteto $Л(2\vartheta) = 2(Л(\vartheta) + Л(\vartheta + \pi/2))$. Torej imamo rezultat: $V_1 = \frac{1}{2}Л(\alpha)$.



Slika 9. Pravokotna projekcija idealnega tetraedra na ravnino $z = 0$.

Nalogo lahko posplošimo tako, da za integracijsko območje Δ vzamemo katerikoli trikotnik $\triangle ABC$, ki je včrtan krožnici $x^2 + y^2 = 1$ na ravnini $z = 0$. Prostornina idealnega tetraedra, ki ima oglišča A, B, C in ∞, je odvisna od kotov $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$. Na skici so vsi koti ostri, kar pa ni nujno, kot se da hitro videti.

Prostornina telesa je vsota prostornin teles nad $\triangle ABO, \triangle BCO, \triangle CAO$, od katerih vsakega lahko razdelimo na dva skladna pravokotna trikotnika tipa $\mathcal{D}$. Prostornina nad prvim trikotnikom je Л(γ), nad drugim Л(α) in nad tretjim Л(β). Celotna prostornina je torej

$$V = \text{Л}(\alpha) + \text{Л}(\beta) + \text{Л}(\gamma)\,. \tag{34}$$

Kdaj je prostornina $V = V(\alpha, \beta, \gamma)$ največja? Kote povezuje znana relacija $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Poiščemo lokalni ekstrem funkcije L, ki je dana z izrazom

$$L(\alpha, \beta) = \text{Л}(\alpha) + \text{Л}(\beta) + \text{Л}(\pi - \alpha - \beta) = \text{Л}(\alpha) + \text{Л}(\beta) - \text{Л}(\alpha + \beta)\,.$$

Potrebna pogoja za ekstrem sta:

$$L_\alpha(\alpha, \beta) = \text{Л}'(\alpha) - \text{Л}'(\alpha + \beta) = -\ln(2\sin\alpha) + \ln(2\sin(\alpha + \beta)) = 0\,,$$

$$L_\beta(\alpha, \beta) = \text{Л}'(\beta) - \text{Л}'(\alpha + \beta) = -\ln(2\sin\beta) + \ln(2\sin(\alpha + \beta)) = 0\,.$$

Takoj vidimo, da morajo biti vsi trije koti med seboj enaki: $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$. Hessejeva matrika funkcije L v stacionarni točki je

$$\begin{bmatrix} L_{\alpha\alpha}(\pi/3, \pi/3) & L_{\alpha\beta}(\pi/3, \pi/3) \\ L_{\beta\alpha}(\pi/3, \pi/3) & L_{\beta\beta}(\pi/3, \pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\operatorname{ctg}(\pi/3) & \operatorname{ctg}(\pi/3) \\ \operatorname{ctg}(\pi/3) & -2\operatorname{ctg}(\pi/3) \end{bmatrix}.$$

Ker je matrika očitno negativno definitna, ima funkcija L za $\alpha = \pi/3$ in $\beta = \pi/3$ res lokalni maksimum. Največja prostornina idealnega tetraedra je približno $V = 1.0149416$.

Zgoraj smo z indeksi α in β označili parcialne odvode, na primer:

$$L_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \alpha},\ L_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha \partial \beta},\ \ldots$$

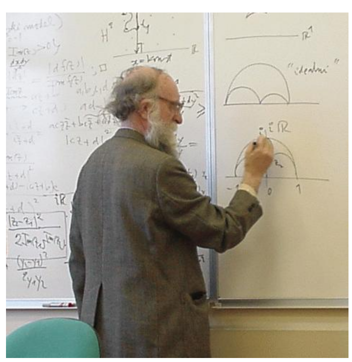
6 Ivan Pucelj

Avtor se je prvič srečal s funkcijo Lobačevskega na nekem seminarju, na katerem je Ivan Pucelj predaval o neevklidski geometriji.

Ivan Pucelj se je rodil leta 1930 v vasi Visoko pod Kureščkom. Leta 1954 je diplomiral na Univerzi v Ljubljani. Dolga leta je poučeval matematiko in fiziko na gimnaziji, dvajset let pa je bil višji predavatelj za analizo in geometrijo na Pedagoški akademiji v Ljubljani. Znan je po svojem delu [4], je pa tudi soavtor več učbenikov in zbirk nalog za osnovno šolo in gimnazijo. Sodeloval je tudi pri delih za kombinatoriko in zavarovalniško matematiko.

Za marsikoga je bila knjiga [4] prvo delo, v katerem se je srečal z neevklidsko geometrijo, in to v slovenščini. Prav veliko del o neevklidski geometriji v slovenski matematični literaturi pravzaprav ni, je le nekaj diplomskih del in raziskovalnih nalog.

Prof. Pucelj je objavil tudi druge zanimivosti, na primer o rdečem premiku, o utrinkih, o kitah, spletih in vozlih, o Pitagorovem drevesu, o računanju z rimskimi številkami, o ploščini mrežnih večkotnikov, o Prešernovi Vrbi in zlatem rezu.



Slika 10. Ivan Pucelj.

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover publications, New York, 1972.

[2] I. S. Gradsteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums and products*, edited by A. Jeffrey, Academic Press, New York, 1994.

[3] J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bulletin of the AMS, Vol. 6, No. 1, 1982, str. 9–24.

[4] I. Pucelj, *Neevklidične geometrije*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1969.

[5] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifold*, Graduate texts in mathematics, Vol. 149, Second edition, Springer, 2006.

[6] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA – Založništvo, Ljubljana, 2008.