Univerza v Ljubljani

Pedagoška fakulteta

Oddelek za matematiko in računalništvo

Katedra za algebro in analizo

Marko Razpet

SREBRNO RAZMERJE IN PELLOVA ŠTEVILA

Študijsko gradivo

Matematične teme z didaktiko

Ljubljana, marec 2016

Vsebina

Seznam slik

Predgovor

Veliko ljudi pozna pojme zlatega reza, zlatega razmerja in zlatega števila, pa tudi zlatega pravokotnika, zlatega trikotnika in zlate spirale. Marsikdo ve, da so Fibonaccijeva števila povezana z zlatim razmerjem. Manj pa je znano, da obstajajo tudi splošnejša, kovinska razmerja, od katerih so zlato, srebrno in bronasto razmerje samo posebni primeri. Imena teh razmerij lahko logično povežemo z odličji, ki jih prejemajo športniki na velikih tekmovanjih.

V prispevku si bomo pobliže ogledali srebrno razmerje, ki po naravni logiki sledi zlatemu. Srebrno razmerje je na zanimiv način povezano s Pellovimi števili, ki so vpeljana podobno kot Fibonaccijeva. Medtem ko zlato razmerje najdemo v pravilnem petkotniku, nastopa srebrno razmerje v pravilnem osemkotniku. Prav tako kot zlato razmerje in pravilni petkotnik imajo umetniki radi tudi srebrno razmerje in pravilni osemkotnik. Slednjega najdemo v arhitekturi in tehniki, pa tudi navadni dežnik v razpetem stanju nas mora spominjati na pravilni osemkotnik. Celo papirna pola formata A4 je tesno povezana s srebrnim razmerjem. Zlati spirali ustreza dvojna srebrna.

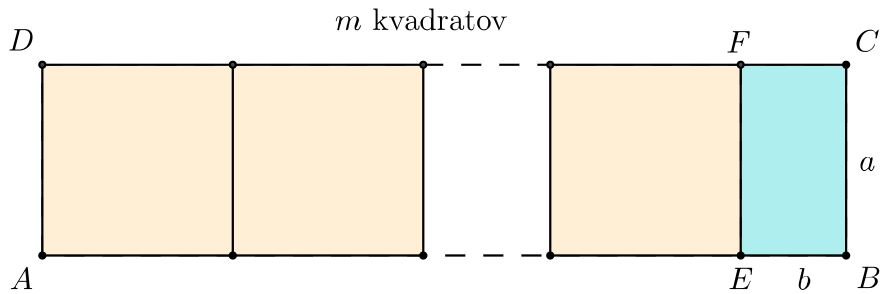
Za gladko razumevanje besedila je v glavnem potrebno le solidno znanje srednješolske matematike. V nekem trenutku uporabimo matrike tipa 2×2, ki ne bi smele delati resnih problemov, pa tudi nekaj pojmov iz teorije grafov ne. Samo proti koncu posežemo po višji matematiki, ker je treba izračunati nekaj odvodov in integralov.

Če bo pričujoča snov vzbudila vsaj malo zanimanja za študij kovinskih razmerij in vsega, kar zraven spada, bo namen objave gradiva več kot dosežen.

Ljubljana, marca 2016 — Dr. Marko Razpet

1 Kovinska razmerja

Kovinsko razmerje je posplošitev pojma zlatega razmerja, v zvezi s katerim je bolj znan pojem zlatega reza, ki je bil znan v umetnosti že v antičnih časih in v obdobju renesanse.



Slika 1: K definiciji kovinskega razmerja reda m

Vzemimo m skladnih kvadratov s stranico a in jih postavimo enega zraven drugega, kot kaže slika 1. Tako dobimo pravokotnik $AEFD$ s stranicama ma in a. Ta pravokotnik podaljšamo s pravokotnikom $EBCF$ s stranicama b in a tako, da je pravokotnik $ABCD$ podoben pravokotniku $EBCF$. Pri tem je $b < a$ in m naravno število. Iz zahteve po podobnosti pravokotnikov dobimo relacijo:

$$\frac{ma+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Po odpravi ulomkov in preureditvi členov dobimo

$$a^2 - mab - b^2 = 0.$$

Če vpeljemo $x = a/b$, dobimo kvadratno enačbo

$$x^2 - mx - 1 = 0,$$

ki ima rešitvi

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}, \ x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2}.$$

V poštev pride samo prva, pozitivna rešitev x_1, ki jo označimo s κ_m in jo imenujemo *kovinsko razmerje* ali *kovinsko število* reda m:

$$\kappa_m = \frac{a}{b} = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}.$$

Očitno je $\kappa_m = a/b > m$ in posledično $b/a < 1/m \leq 1$ ter $b < a$, kot smo zahtevali. Vsako razmerje $a : b = a/b$ je število in vsako število s je razmerje,

m	κ_m	približek	tudi	ime
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618033989	ϕ, τ	zlato razmerje
2	$1+\sqrt{2}$	2,414213562	ψ	srebrno razmerje
3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,302775638	χ	bronasto razmerje
4	$2+\sqrt{5}$	4,236067977		
5	$\frac{5+\sqrt{29}}{2}$	5,192582404		
6	$3+\sqrt{10}$	6,162277660		

Tabela 1: Nekaj kovinskih razmerij

če drugega ne, je to $s : 1 = s/1$. Tako je učil Evdoks (410–347) iz Knida.

Za število κ_m velja relacija $\kappa_m^2 = m\kappa_m + 1$, ki jo predelamo v obliko

$$\kappa_m = m + \frac{1}{\kappa_m}.$$

Iz nje hitro dobimo razvoj v verižni ulomek:

$$\kappa_m = m + \frac{1}{\kappa_m} = m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\kappa_m}} = m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

To je pravi verižni ulomek, ker so števci ulomkov enaki 1. Krajše ga po dogovoru zapišemo kot

$$\kappa_m = [m; m, m, m, \ldots],$$

kjer m pred podpičjem pomeni celi del števila κ_m.
Iz relacije $\kappa_m^2 = 1 + m\kappa_m$ dobimo ekvivalentno relacijo

$$\kappa_m = \sqrt{1 + m\kappa_m}.$$

Če jo uporabljamo korak za korakom, dobimo še razvoj z vgnezdenimi koreni

$$\kappa_m = \sqrt{1 + m\kappa_m} = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\kappa_m}} = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\sqrt{1 + \ldots}}}}.$$

Vsa števila κ_m *so iracionalna.* Če bi predpostavili nasprotno, da je κ_m racionalno število, potem bi ga lahko zapisali kot okrajšan ulomek: $\kappa_m = p/q$. Pri tem sta si p in q tuji naravni števili. Potem bi veljala relacija

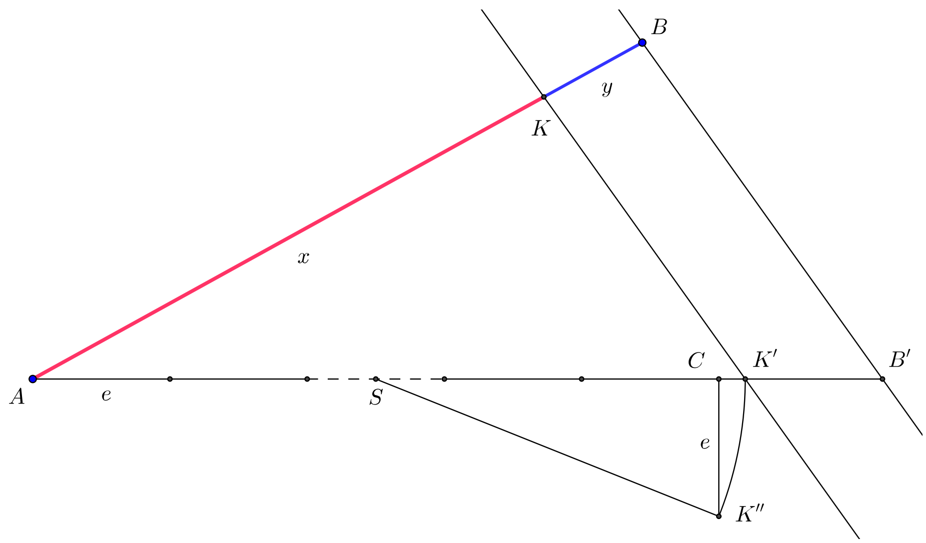
$$\frac{p}{q} = m + \frac{q}{p} = \frac{mp + q}{p}.$$

Števec in imenovalec zadnjega ulomka sta si tudi tuja. Če bi namreč naravno število $d > 1$ delilo p in $mp + q$, bi delilo tudi q, kar ne gre, ker sta si p in q tuji števili. Torej je ulomek na desni strani zgornje relacije okrajšan. To pa ne gre drugače, kot da je $q = p$ in $mp + q = p$. Iz tega sledi $mp = 0$, kar je pri danih pogojih nemogoče. Za vsak naraven m je število κ_m iracionalno.
Kako vemo, da iz enakosti okrajšanih ulomkov sledita enakosti njunih števcev in imenovalcev? Vzemimo, da velja $u/v = r/s$, kjer so u, v, r, s naravna števila, u tuj v, r tuj s. Enakost ulomkov da relacijo $us = vr$. Torej u deli produkt vr. Ker je u tuj v, mora u deliti r. Po drugi strani pa r deli produkt

us. Ker je r tuj s, mora r deliti u. Ker u in r delita drug drugega, sta seveda enaka: $u = r$. Potem pa sta tudi v in s enaka.

Dano daljico AB dolžine a deli po definiciji točka K v kovinskem razmerju reda m, če je $x/y = |AK|/|KB| = \kappa_m$.

Kako z geometrijsko konstrukcijo dano daljico AB dolžine a razdeliti v kovinskem razmerju reda m?



Slika 2: Delitev daljice AB v kovinskem razmerju reda m

Iz točke A načrtamo pod nekim ostrim kotom poltrak in na njem izberemo točko C (slika 2). Daljico AC razdelimo na m dolžinsko enakih delov. Vsak del naj ima dolžino e. Določimo središče S daljice AC, nato konstruiramo nad daljico SC pravokoten trikotnik $SK''C$ s pravim kotom ob oglišču C in drugo kateto e. Načrtamo krožni lok s središčem v S in polmerom $|SK''|$, ki seka poltrak v točki K'. Nato podaljšamo za e daljico AK', da dobimo točko B'. Skozi B in B' potegnemo premico, skozi K' pa njej vzporednico, ki seka daljico AB v iskani točki K.

Pravilnost konstrukcije upravičimo s tem, da točka K' deli daljico AB' v razmerju κ_m, ker je

$$|SK''| = \sqrt{(me/2)^2 + e^2} = \frac{e}{2}\sqrt{m^2+4},\ |AK'| = \frac{me}{2} + \frac{e}{2}\sqrt{m^2+4} = \kappa_m e$$

in s tem $|AK'|/|K'B'| = \kappa_m$. Ker sta si po konstrukciji trikotnika $AB'B$ in $AK'K$ podobna, deli K daljico AB v razmerju κ_m.

Prva tri kovinska razmerja imajo posebna imena: zlato ($\phi = \kappa_1$), srebrno ($\psi = \kappa_2$) in bronasto ($\chi = \kappa_3$). Njihove osnovne relacije so

$$\phi^2 = \phi + 1,\ \psi^2 = 2\psi + 1,\ \chi^2 = 3\chi + 1.$$

Približki zanje so zapisani v tabeli 1. Razvoji v verižne ulomke so

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

$$\psi = 2 + \frac{1}{\psi} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\psi}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

$$\chi = 3 + \frac{1}{\chi} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\chi}} = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}},$$

v strnjeni obliki pa

$$\phi = [1; 1, 1, 1, \ldots],\ \psi = [2; 2, 2, 2, \ldots],\ \chi = [3; 3, 3, 3, \ldots].$$

Imena so usklajena z bleskom odličij, ki jih športniki prejemajo na velikih tekmovanjih v posameznih disciplinah: prvi dobi zlato, drugi srebrno in tretji bronasto medaljo. Izraz *zlato razmerje* z drugim imenom najdemo že v Evklidovih Elementih. Imenuje ga *skrajno in srednje razmerje*, grško ἄκρος καὶ μέσος λόγος (glej slovar [2]). V obdobju renesanse so ga v Italiji poimenovali *božansko razmerje*, *la divina proporzione*. Šele Martin Ohm (1792–1872) je baje skoval današnji izraz *zlato razmerje*. V naših geometrijskih učbenikih uporabljajo tudi izraz *stalno razmerje*. Izraz *kovinsko razmerje* uporablja v [6] leta 1929 rojena argentinska matematičarka Vera Martha Winitzki de Spinadel.

2 Srebrno razmerje

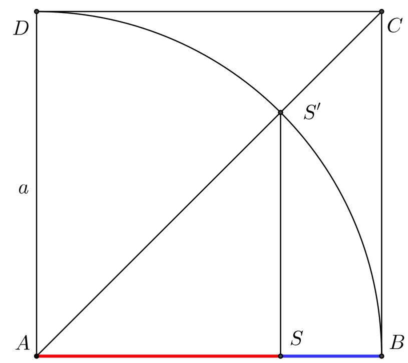
Srebrno razmerje $\psi = 1+\sqrt{2}$, drugo kovinsko razmerje, je po svoje zanimivo, ker ga najdemo marsikje v matematiki. Ni tako imenitno kot zlato razmerje $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, toda vredno je posebne obravnave.

Najprej poglejmo, kako geometrijsko daljico AB dolžine a razdeliti s točko S v srebrnem razmerju ψ, to se pravi $|AS|/|SB| = \psi$. Lahko bi se sklicevali na sliko 2, lahko pa konstrukcijo poenostavimo (slika 3).

Nad daljico AB konstruiramo kvadrat $ABCD$ z diagonalo AC. Iz točke A odmerimo a po tej diagonali, da dobimo točko S'. To točko pravokotno projiciramo na stranico AB, kjer dobimo točko S.

Točka S deli AB v srebrnem razmerju. Velja namreč $|AS| = a/\sqrt{2}$, $|SB| = a(1-1/\sqrt{2})$ in

$$\frac{|AS|}{|SB|} = \frac{a/\sqrt{2}}{a(1-1/\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2} = \psi.$$



Slika 3: Delitev daljice AB v srebrnem razmerju

3 Srebrni pravokotnik

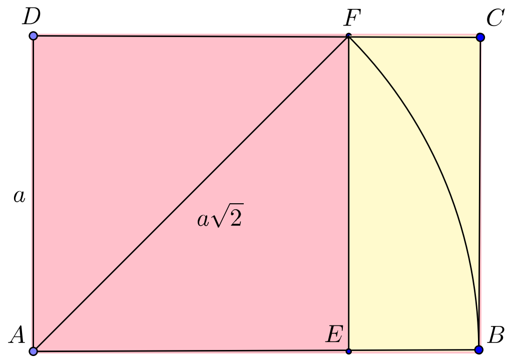
Srebrni pravokotnik ima stranici v srebrnem razmerju ψ. Konstrukcija je preprosta. Denimo, da je znana krajša stranica a srebrnega pravokotnika $ABCD$. Konstruiramo kvadrat $AEFD$ s stranico a, nato njegovo diagonalo AF, ki jo odmerimo iz A v podaljšek stranice AE, kjer dobimo točko B. Presek podaljška daljice DF in pravokotnice na podaljšek stranice AE v točki B je točka C. Pravokotnik $ABCD$ ima za razmerje stranic število $\sqrt{2}$, pravokotnik $EBCF$ pa srebrno razmerje:

$$\frac{|BC|}{|EB|} = \frac{a}{a(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2} = \psi.$$

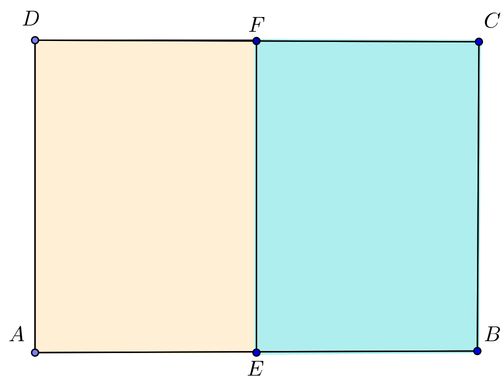
Pravokotnik $ABCD$ na sliki 4 ima lastnost, da po razdelitvi s krajšo srednjico dobimo dva skladna pravokotnika, ki sta podobna začetnemu.

Stranici pravokotnika $ABCD$ sta a in $b = a\sqrt{2}$, stranici manjšega, na primer $AEFD$ pa $a_1 = a\sqrt{2}/2$ in $b_1 = a$. Ker je $b_1/a_1 = \sqrt{2} = b/a$, sta si prvotni pravokotnik in njegova polovica zares podobna lika.

Na podlagi takega pravokotnika so odrejene dimenzije pisarniškega papirja formata A. Največji je A0, ki meri 1 m^2. Z zaporednim razpolavljanjem



Slika 4: Konstrukcija srebrnega pravokotnika

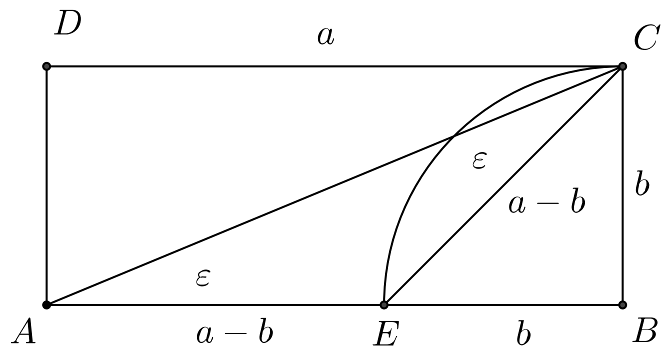


Slika 5: Delitev pravokotnika z razmerjem stranic $\sqrt{2}$ na skladna dela

dobimo formate A1, A2, ... Format An ima dimenziji $\sqrt[4]{2}/\sqrt{2^n}$ m in $\sqrt[4]{2}/\sqrt{2^{n+1}}$ m in ploščino $1/2^n$ m^2. Po pisarnah in tiskalnikih najpogosteje uporabljajo papir formata A4, ki ima dimenziji 297 mm in 210 mm.

Če od lista formata A4 odstrižemo največji kvadrat v skladu s sliko 4, dobimo model srebrnega pravokotnika. Izračunajmo kot ε med diagonalo in daljšo stranico srebrnega pravokotnika $ABCD$ (slika 6).

Stranico b odmerimo iz oglišča B po stranici AB, da dobimo točko E. V trikotniku AEC je stranica AE dolga $a-b = b(1+\sqrt{2})-b = b\sqrt{2}$. Prav toliko



Slika 6: Kot med diagonalo in daljšo stranico v srebrnem pravokotniku

je dolga stranica EC. Torej je trikotnik AEC enakokrak. Kota EAC in ACE sta enaka, označili smo ju z ε. Ker je zunanji kot ob vrhu E enak $\pi/4$ ali $45°$ in je enak vsoti notranjih, nepriležnih kotov, torej 2ε, je $\varepsilon = \pi/8$ ali $22°30'$. Torej je $\tan(\pi/8) = b/a = 1/(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$ in $\cot(\pi/8) = \sqrt{2}+1 = \psi$. Z malo računanja dobimo še vrednosti funkcije sinus in kosinus, tako da je popoln seznam:

$$\sin(\pi/8) = \sqrt{2-\sqrt{2}}/2,\ \cos(\pi/8) = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2,$$

$$\tan(\pi/8) = \sqrt{2}-1,\ \cot(\pi/8) = \sqrt{2}+1.$$

Srebrno razmerje je kotangens kota $\pi/8$. Diagonali srebrnega pravokotnika se sekata pod kotom $\pi/4$.

4 Potence srebrnega razmerja in Pellova števila

Najprej bomo izračunali potence ψ^n za nenegativne cele eksponente n. Hitro ugotovimo, da je $\psi^n = a_n + b_n\psi$ za zaporedji $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in $b_0, b_1, b_2, \ldots$ z nenegativnimi celimi členi in da je zapis enoličen. Če bi namreč imeli za racionalna števila $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ enakost $\alpha + \beta\psi = \alpha' + \beta'\psi$ pri pogoju $\beta \neq \beta'$, bi dobili

$$\psi = \frac{\alpha - \alpha'}{\beta' - \beta},$$

kar pa je nemogoče, ker imamo na levi strani zgornje relacije iracionalno, na desni strani pa racionalno število. Zato je $\beta = \beta'$ in posledično $\alpha = \alpha'$.
Ker je $\psi^0 = 1$ in $\psi^1 = \psi$, je $a_0 = 1, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1$. Iz zapisa

$$\psi^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\psi = \psi^n\psi = (a_n + b_n\psi)\psi = a_n\psi + b_n\psi^2$$

dobimo z upoštevanjem osnovne zveze $\psi^2 = 2\psi + 1$

$$a_{n+1} + b_{n+1}\psi = a_n\psi + b_n(2\psi + 1) = b_n + (a_n + 2b_n)\psi,$$

nato pa zaradi enoličnosti zapisa sistem rekurzivnih relacij:

$$a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = a_n + 2b_n.$$

Z izločitvijo enega od zaporedij dobimo:

$$a_{n+2} = b_{n+1} = a_n + 2b_n = a_n + 2a_{n+1}.$$

Podobno tudi

$$b_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = b_n + 2b_{n+1}.$$

Členi zaporedij zadoščajo isti diferenčni enačbi, toda z različnimi začetnimi pogoji:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 0$$

in

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1.$$

Števila b_n imenujemo *Pellova števila*, ki sestavljajo *Pellovo zaporedje*. Člene označimo s P_n. Torej $b_n = P_n, a_n = P_{n-1}$. Členi Pellovega zaporedja zadoščajo rekurzivni relaciji

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n,\ P_0 = 0,\ P_1 = 1.$$

Očitno je dovolj rešiti to enačbo. Člene lahko računamo podobno kot člene Fibonaccijevega zaporedja (več o tem na primer v [1, 3]): neki člen je vsota dvakratnika prejšnjega in predprejšnjega člena, na primer: $P_2 = 2P_1 + P_0 = 2, P_3 = 2P_2 + P_1 = 5$. Za splošno formulo pa po ustaljeni metodi postavimo $P_n = \lambda^n$ in dobimo kvadratno enačbo:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0,$$

ki ima korena $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ in $\lambda_2 = 2 - \lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$. Veljata relaciji $\lambda_1 > 1, |\lambda_2| < 1$. Splošna rešitev je

$$P_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n.$$

Iz pogoja $P_0 = 0$ dobimo $c_2 = -c_1$, tako da je

$$P_n = c_1(\lambda_1^n - \lambda_2^n).$$

Iz pogoja $P_1 = 1$ je $c_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 2c_1\sqrt{2} = 1$, $c_1 = 1/(2\sqrt{2})$ in nazadnje

$$b_n = P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n),\ a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+\sqrt{2})^{n-1} - (1-\sqrt{2})^{n-1}).$$

Formuli sta pravilni za vsa cela števila $n \geq 0$. Zaporedje členov b_n oziroma P_n se pričenja z 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2 378, ..., zaporedje členov a_n pa z 1, 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ... Izraze lahko preoblikujemo v

$$b_n = P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi^n - (2-\psi)^n),\ a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi^{n-1} - (2-\psi)^{n-1}).$$

Ker je po binomski formuli

$$\psi^n = (1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k/2},\ (2-\psi)^n = (1-\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{k/2},$$

najdemo po poenostavitvi še drugo obliko Pellovih števil za $n \geq 1$:

$$P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k.$$

Našli smo že relacijo:

$$\psi^n = P_{n-1} + P_n \psi.$$

Formula je pravilna za vsako nenegativno celo število n, če vzamemo, kar je popolnoma smiselno, $P_{-1} = 1$.

Iz zapisa

$$\psi^{-1} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 = (\psi - 1) - 1 = -2 + \psi$$

smiselno sledi $P_{-2} = -2$ in $P_{-1} = 1$. Zato lahko Pellovo zaporedje razširimo na negativne indekse:

$$\ldots, P_{-4}, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$$

Da za vse cele indekse velja relacija $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$, je treba postaviti $P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$ za $n > 0$. Dvostransko Pellovo zaporedje okoli ničle je torej

$$\ldots, -12, 5, -2, 1, 0, 1, 2, 5, 12, 29, \ldots$$

Poglejmo, tako kot pri Fibonaccijevem zaporedju, kvociente dveh zaporednih členov P_{n+1}/P_n za $n > 0$:

$$\frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{29}{12}, \frac{70}{29}, \ldots$$

V splošnem lahko zapišemo

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\psi^{n+1} - (2-\psi)^{n+1}}{\psi^n - (2-\psi)^n} = \frac{\psi - (2-\psi)\left(\frac{2-\psi}{\psi}\right)^n}{1 - \left(\frac{2-\psi}{\psi}\right)^n}.$$

Ker je $|(2-\psi)/\psi| < 1$, je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2-\psi}{\psi}\right)^n = 0$$

in na koncu imamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \psi.$$

Pellova števila imajo veliko lastnosti, ki so analogne Fibonaccijevim številom.

5 Rodovne funkcije

Po [7] so rodovne funkcije neke vrste most med *diskretno* in *zvezno matematiko*, zlasti kompleksno analizo. So orodje, s katerim študiramo diskretne probleme. Vendar obe veji matematike ne moreta shajati ena brez druge. Če bi se omejili na eno, bi bilo podobno, kakor da bi uporabljali samo en kanal pri poslušanju glasbe, ki je posneta v stereo tehniki.

Rodovna funkcija Pellovih števil P_n je potenčna vrsta

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n.$$

Pogosto so vrste za rodovne funkcije le formalne, včasih pa le znamo določiti njihov konvergenčni polmer. Da bi dobili rodovno funkcijo Pellovih števil, uporabimo enakost $\psi^n = P_{n-1} + \psi P_n$. Iz nje dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi^n x^n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1} x^n + \psi \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n.$$

Za $|\psi x| < 1$ je

$$\frac{1}{1-\psi x} = 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n + \psi \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n,$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\frac{1}{1-\psi x} = 1 + xP(x) + \psi P(x) = 1 + (x+\psi)P(x).$$

Tako dobimo

$$P(x) = \frac{\dfrac{1}{1-\psi x} - 1}{x+\psi} = \frac{1-(1-\psi x)}{(1-\psi x)(x+\psi)} = \frac{\psi x}{x - \psi x^2 + \psi - \psi^2 x}.$$

Z upoštevanjem relacije $\psi^2 = 1 + 2\psi$ in krajšanjem imamo nazadnje:

$$P(x) = \frac{x}{1-2x-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n,\ |x| < \psi - 2.$$

Tudi potence ψ^n z nenegativnim eksponentom n srebrnega razmerja imajo rodovno funkcijo

$$\Theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n x^n = \frac{1}{1-\psi x},\ |x| < \psi - 2.$$

Obe rodovni funkciji sta povezani z relacijo

$$\Theta(x) = 1 + (x+\psi)P(x).$$

Rodovno funkcijo imajo tudi potence ψ^{-n}:

$$\bar{\Theta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^{-n} x^n = \frac{\psi}{\psi - x},\ |x| < \psi.$$

V posebnem primeru $x = 2$ dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\psi}\right)^n = \frac{\psi}{\psi - 2} = \frac{\psi^2}{\psi^2 - 2\psi} = \psi^2$$

in

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\psi}\right)^n = \psi^2 - 1 = 2\psi.$$

Tako imamo dve lepi številski vrsti:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\psi}\right)^n = \psi^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\psi}\right)^n = 2\psi.$$

6 Matrični zapis in nekaj enakosti

Iz zapisov relacij $a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = a_n + 2b_n,\ a_0 = 1, b_0 = 0$, ki smo jih srečali pri obliki potence $\psi^n = a_n + b_n\psi$, izhaja matrični zapis (glej [4])

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

ki ga lahko prepišemo še s Pellovimi števili:

$$\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix}.$$

Z večkratno uporabo najdemo:

$$\begin{bmatrix} P_n \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo potence matrike:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix}.$$

Elementi potence so členi nekega zaporedja. Zanje dobimo rekurzivne relacije in začetne pogoje. Zapišimo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Veljati mora sistem relacij

$$\alpha_{n+1} = \beta_n,\ \beta_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n,\ \gamma_{n+1} = \delta_n,\ \delta_{n+1} = \gamma_n + 2\delta_n$$

pri pogojih $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0, \gamma_0 = 0, \delta_0 = 1$ (elementi enotske matrike). Tak sistem pa smo pravzaprav že rešili, ko smo iskali koeficiente v razvoju ψ^n:

$$\alpha_n = P_{n-1},\ \beta_n = P_n,\ \gamma_n = P_n,\ \delta_n = P_{n+1}.$$

Sedaj lahko zapišemo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_n \\ P_n & P_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Če izračunamo determinanti obeh strani, dobimo enakost

$$P_{n-1}P_{n+1} - P_n^2 = (-1)^n,$$

ki je analogija Cassinijevi enakosti za Fibonaccijeva števila. Iz zapisa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{n+m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^m,$$

ki ga izrazimo s Pellovimi števili v obliki

$$\begin{bmatrix} P_{n+m-1} & P_{n+m} \\ P_{n+m} & P_{n+m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_n \\ P_n & P_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{m-1} & P_m \\ P_m & P_{m+1} \end{bmatrix},$$

sledijo razne enakosti s Pellovimi števili. Pri vseh teh matrikah so lahko eksponenti poljubna cela števila, Pellova števila dovoljujemo pač tudi za negativne indekse. Matrike, ki nastopajo zgoraj, so vse obrnljive. Iz zgornje matrične enakosti dobimo na primer enakost

$$P_{n+m} = P_nP_{m-1} + P_{n+1}P_m,$$

za $m = n + 1$ pa še

$$P_{2n+1} = P_n^2 + P_{n+1}^2.$$

Vsako Pellovo število z lihim indeksom je torej vsota dveh kvadratov. V posebnem primeru, ko je $m = n$, velja enakost

$$P_{2n} = P_n(P_{n-1} + P_{n+1}).$$

Preverimo enakost

$$P_{2n+1} + P_{2n} = 2(P_{n+1}^2 - P_n^2) - (-1)^n.$$

Upoštevamo prejšnje enakosti in računajmo:

$$P_{2n+1} + P_{2n} = P_n^2 + P_{n+1}^2 + P_n(P_{n-1} + P_{n+1}) =$$

$$= P_{n+1}^2 + P_{n-1}P_{n+1} - (-1)^n + P_n(2P_{n+1} - 2P_n) =$$

$$= P_{n+1}^2 + P_{n+1}(P_{n+1} - 2P_n) - (-1)^n + P_n(2P_{n+1} - 2P_n) =$$

$$= 2(P_{n+1}^2 - P_n^2) - (-1)^n.$$

Nič teže ni dokazati enakost

$$P_n^2 + P_{n+3}^2 = 5(P_{n+1}^2 + P_{n+2}^2).$$

Zapišimo:

$$P_n^2 + P_{n+3}^2 = P_{n-1}P_{n+1} - (-1)^n + P_{n+2}P_{n+4} - (-1)^{n+3} =$$

$$= (P_{n+1} - 2P_n)P_{n+1} + P_{n+2}(2P_{n+3} + P_{n+2}) =$$

$$= P_{n+1}^2 + P_{n+2}^2 + 2(P_{n+2}P_{n+3} - P_nP_{n+1}) =$$

$$= P_{n+1}^2 + P_{n+2}^2 + 2(P_{n+2}(2P_{n+2} + P_{n+1}) - (P_{n+2} - 2P_{n+1})P_{n+1}) =$$

$$= 5(P_{n+1}^2 + P_{n+2}^2).$$

Vsota kvadratov prvih n zaporednih Pellovih števil se da izraziti v preprosti obliki (glej [5]):

$$\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2 = \frac{1}{2} P_n P_{n+1}.$$

Izpeljava je posledica enakosti

$$P_k P_{k+1} - P_{k-1} P_k = 2P_k^2,$$

ki jo preverimo takole:

$$P_k P_{k+1} - P_{k-1} P_k = P_k(P_{k+1} - P_{k-1}) = P_k(2P_k + P_{k-1} - P_{k-1}) = 2P_k^2.$$

Zato je

$$\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (P_k P_{k+1} - P_{k-1} P_k) = \frac{1}{2} (P_n P_{n+1} - P_0 P_1) = \frac{1}{2} P_n P_{n+1}.$$

Poigrajmo se še z eno formulo. Začnimo z očitno enakostjo

$$P_{k-1} P_{k+1} = P_{k+1} P_{k-1}.$$

Če v njej iz rekurzivne relacije za Pellova števila izrazimo $P_{k+1} = 2P_k + P_{k-1}$ na levi strani in $P_{k-1} = P_{k+1} - 2P_k$ na desni strani, dobimo enakost

$$P_{k-1}(2P_k + P_{k-1}) = P_{k+1}(P_{k+1} - 2P_k),$$

ki jo predelamo v obliko

$$2P_{k-1} P_k + 2P_k P_{k+1} = P_{k+1}^2 - P_{k-1}^2.$$

Sedaj presumirajmo člene po indeksu k od 1 do $n \geq 1$:

$$2 \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} P_k + 2 \sum_{k=1}^{n} P_k P_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} P_{k+1}^2 - \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}^2.$$

S preprostimi manipulacijami s sumacijskimi indeksi dobimo:

$$4\sum_{k=1}^{n} P_kP_{k+1}-2P_nP_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} P_k^2+P_{n+1}^2-P_1^2-\sum_{k=1}^{n} P_k^2+P_n^2=P_{n+1}^2+P_n^2-1.$$

Z upoštevanjem že dokazane enakosti $P_n^2+P_{n+1}^2=P_{2n+1}$ imamo nazadnje:

$$\sum_{k=1}^{n} P_kP_{k+1}=\frac{P_{2n+1}+2P_nP_{n+1}-1}{4}.$$

Pellova števila so, tako kot Pellova enačba $x^2-Dy^2=\pm 1$, kjer je D nekvadratno naravno število, dobila ime po angleškem matematiku Johnu Pellu (1611–1685). Pellova enačba v resnici ne nosi pravega imena, ker je Leonhard Euler (1707–1783) enačbo pomotoma pripisal Pellu. Bolje bi bilo, če bi se imenovala po Pierru de Fermatu (1601–1665). V resnici pa sta jo študirala že Indijca Brahmagupta (598–668) (ब्रह्मगुप्त) in Bhaskara Mlajši (1114–1185) ali Bhaskaračarja, Bhaskara Učitelj (भास्कराचार्य).

Kako so Pellova števila povezana s Pellovo enačbo $x^2-2y^2=\pm 1$? Če vzamemo $x=P_{n+1}-P_n=P_{n-1}+P_n$ in $y=P_n$, potem velja:

$$x^2-2y^2=(P_{n+1}-P_n)^2-2P_n^2=P_{n+1}^2-2P_nP_{n+1}-P_n^2=P_{n+1}^2-P_n(2P_{n+1}+P_n)=$$

$$=P_{n+1}^2-P_nP_{n+2}=-(-1)^{n+1}=(-1)^n.$$

To pomeni, da x in y za sode n rešita Pellovo enačbo $x^2-2y^2=1$, za lihe n pa enačbo $x^2-2y^2=-1$.

Primer 1. Za $P_3=5, P_2=2$ je $x=3, y=2$ in $x^2-2y^2=9-2\cdot 4=1$.

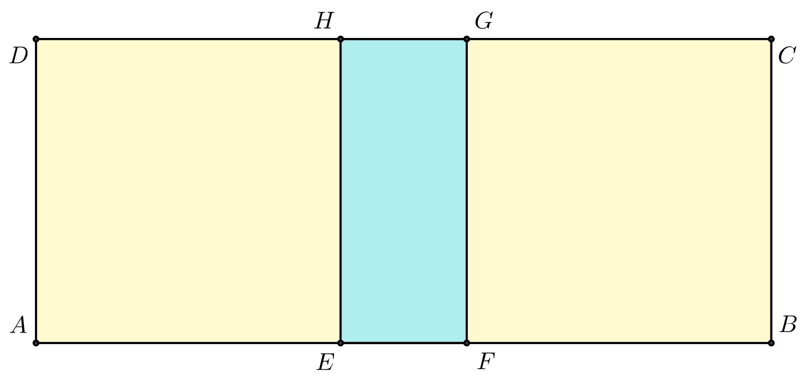
Primer 2. Za $P_4=12, P_3=5$ je $x=7, y=5$ in $x^2-2y^2=49-2\cdot 25=-1$.

7 Dvojna srebrna spirala

Srebrni pravokotnik $ABCD$ razdelimo na kvadrata $AEHD$ in $FBCG$ ter pravokotnik $EFGH$, kot kaže slika 7. Pravokotnik $EFGH$ je tudi srebrn, kot nam pokaže preprost račun. Če ima srebrni pravokotnik $ABCD$ krajšo stranico dolžine a, potem je njegova daljša stranica dolga ψa. Krajša stranica pravokotnika $EFGH$ je potem dolga $\psi a - 2a = a(\psi - 2)$, daljša pa a. Potem velja:

$$\frac{|FG|}{|EF|} = \frac{a}{a(\psi - 2)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2} = \psi.$$

Pravokotnika $ABCD$ in $EFGH$ sta si podobna in srebrna.



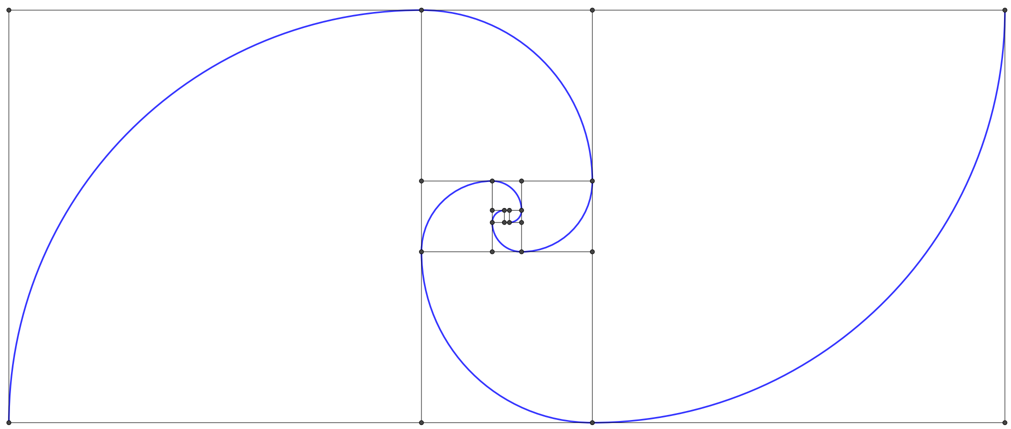
Slika 7: Delitev srebrnega pravokotnika

Po istem postopku lahko delimo naprej pravokotnik $EFGH$, da dobimo v njem manjši srebrni pravokotnik. Očitno lahko ta proces nadaljujemo v nedogled. Dobimo zaporedje srebrnih pravokotnikov, katerih stranice so v razmerjih

$$\psi : 1,\ 1 : \psi^{-1},\ \psi^{-1} : \psi^{-2},\ \psi^{-2} : \psi^{-3},\ \psi^{-3} : \psi^{-4},\ \ldots$$

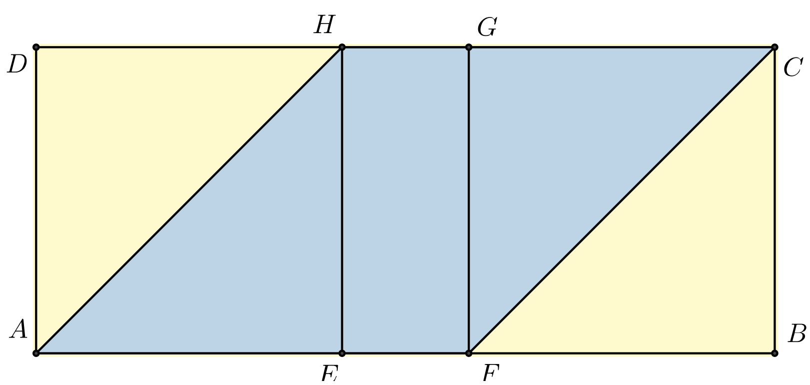
V dobljene kvadrate včrtamo četrtine krožnih lokov tako, kot kaže slika 8. Dobimo tako imenovano *dvojno srebrno spiralo*.

Pokažimo še, da srebrnemu pravokotniku lahko včrtamo romb. Zopet srebrni pravokotnik $ABCD$ s krajšo stranico a razdelimo na kvadrata $AEHD$ in



Slika 8: Dvojna srebrna spirala

$FBCG$ ter pravokotnik $EFGH$, kot kaže slika 7. Nato načrtamo diagonalo AH kvadrata $AEHD$ in diagonalo FC kvadrata $FBCG$. Štirikotnik $AFCH$ je romb. Očitno je $|AH| = |FC| = a\sqrt{2}$.



Slika 9: Romb v srebrnem pravokotniku

Ker je $|EF| = |HG| = a\psi - 2a$, je $|AF| = |HC| = a + (a\psi - 2a) = a(\psi - 1) = a\sqrt{2}$. Očitno sta si tudi stranici AH in FC vzporedni, prav tako stranici AF in HC. Torej je res štirikotnik $AFCH$ romb. V njem se diagonali AC

in FH sekata pravokotno. Ker je AC obenem diagonala večjega srebrnega pravokotnika, FH pa manjšega, se tudi ti dve sekata pravokotno.

8 Pravilni osemkotnik in srebrno razmerje

Videli bomo, kje je srebrno razmerje ψ v pravilnem osemkotniku. Najprej bomo pravilni osemkotnik $ABCDEFGH$ včrtali kvadratu $A'B'C'D'$ tako, da bo stranica AB pravilnega osemkotnika ležala na stranici $A'B'$ kvadrata (slika 10).

Načrtamo diagonalo $A'C'$ kvadrata in dolžino s stranice kvadrata odmerimo po tej diagonali od oglišča C' do točke P. Načrtamo simetralo daljice $A'P$, ki diagonalo seka v točki S, stranico $A'B'$ kvadrata v točki A, stranico $D'A'$ pa v točki H. Z vzporednico stranici $A'B'$ skozi H dobimo točko C na stranici $B'C'$, z vzporednico diagonali $A'C'$ skozi C pa točko B na stranici $A'B'$.

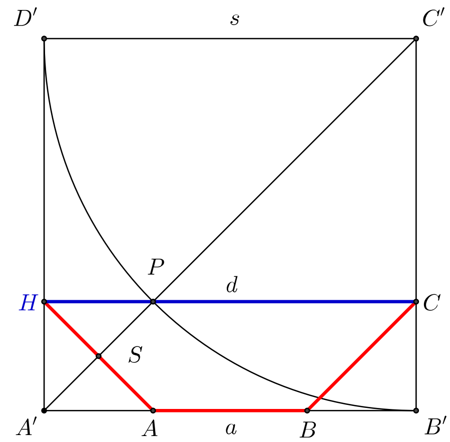
Trdimo, da je $a = |AH| = |AB| = |BC|$ stranica iskanega pravilnega o-semkotnika. Očitno so točke $A'APH$ oglišča nekega kvadrata in $a = |AH| = |A'P| = s\sqrt{2} - s = s(\sqrt{2} - 1)$. Zaradi simetrije glede na srednjico kvadrata, ki je vzporedna stranici $B'C'$, je tudi $a = |BC| = s(\sqrt{2} - 1)$. Izračunajmo

$$|AB| = s-2|A'A| = s-2\frac{|AH|}{\sqrt{2}} = s-\sqrt{2}a = s-s\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = s(\sqrt{2}-1) = a.$$

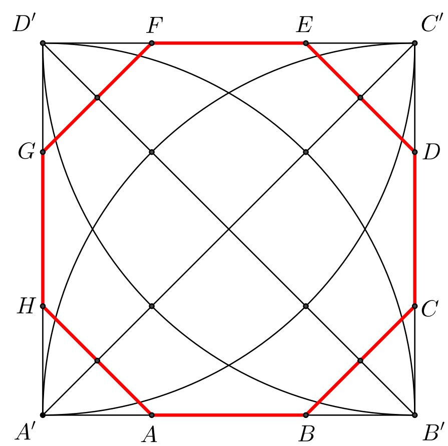
Razmere so nad vsemi kvadratovimi stranicami enake, torej je a res stranica pravilnega osemkotnika. Brez težav lahko pravilni osemkotnik dokončamo tako, kot kaže slika 11.

Daljica HC pa je v njem diagonala z dolžino $d = s$. Razmerje med to diagonalo in stranico pa je:

$$\frac{d}{a} = \frac{s}{s(\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \psi.$$



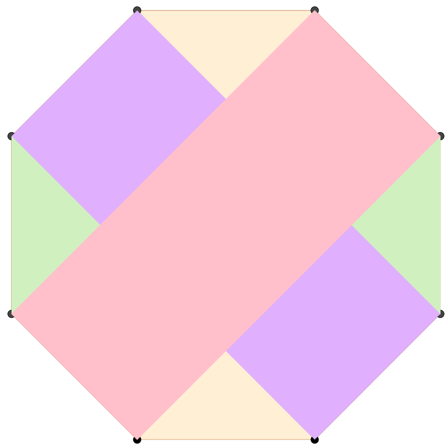
Slika 10: Pravilni osemkotnik, stranica in njej vzporedna diagonala



Slika 11: Pravilni osemkotnik, včrtan kvadratu

Diagonala, ki je vzporedna stranici v pravilnem osemkotniku, je z njo v srebrnem razmerju. Če načrtamo v pravilnem osemkotniku vse diagonale, ki so vzporedne njegovim stranicam, dobimo štiri srebrne pravokotnike, kot kaže slika 12.

Izračunajmo ploščino p pravilnega osemkotnika, očrtanega kvadratu na opisani



Slika 12: Pravilnemu osemkotniku včrtani štirje srebrni pravokotniki

način. Ploščina trikotnika $A'AH$ je $(a/\sqrt{2})^2/2 = a^2/4$, zato je

$$p = s^2 - a^2 = a^2\psi^2 - a^2 = a^2(\psi^2 - 1) = a^2(2\psi + 1 - 1) = 2a^2\psi.$$

Ploščino lahko zapišemo tudi v obliki $p = 2as$, ker je $s = a\psi$.

Pravilni osemkotnik ima 20 diagonal, ki jih po dolžinah razdelimo v tri skupine. Osem diagonal je vzporednih stranicam in so dolge $d = a\psi$, kar smo spoznali zgoraj, ko smo pravilni osemkotnik včrtali kvadratu s stranico s. Videli smo, da je $d = s$.

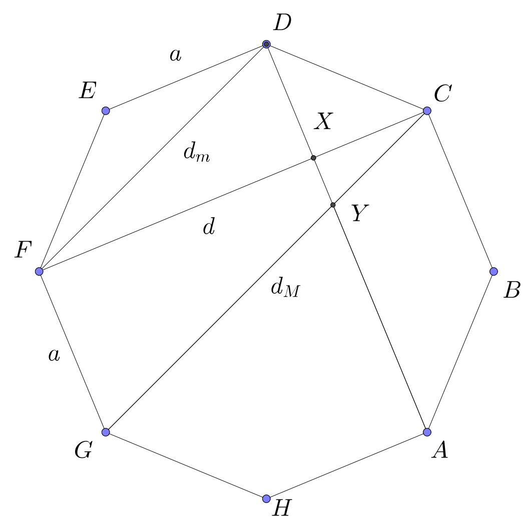
Na sliki 13 sta načrtani kot primer srednje dolgih diagonal AD in FC, ki se v točki X sekata pravokotno. Ti dve diagonali se sekata v srebrnem razmerju. Velja namreč: $|XC| = (\psi a - a)/2 = a(\psi - 1)/2$. Potem je $|FX| = \psi a - a(\psi - 1)/2 = a(\psi + 1)/2$. Torej je

$$\frac{|FX|}{|XC|} = \frac{\psi + 1}{\psi - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} = \psi.$$

Srednje dolgi diagonali se lahko sekata tudi nepravokotno, na primer diagonali CF in BE. Hitro vidimo, da se sekata v razmerju $\sqrt{2}$.

Na sliki 13 je z Y označeno presečišče najdaljše in srednje dolge diagonale. Zlahka preverimo, da najdaljša diagonala deli srednjo dolgo v razmerju $\sqrt{2}$, medtem ko srednje dolga deli najdaljšo v srebrnem razmerju ψ. Če pregledamo celotno paleto možnosti, kako se med seboj delijo diagonale v pravilnem osemkotniku, dobimo za kvociente števila $1, \sqrt{2}, \psi, 2\psi$.

Štiri diagonale so najdaljše, povezujejo diametralno nasprotna oglišča. Vsaka od njih je dolga $d_M = a\sqrt{1+\psi^2} = a\sqrt{2(1+\psi)}$, kar dobimo po Pitagorovem izreku iz pravokotnega trikotnika GCF (slika 13).



Slika 13: Diagonale pravilnega osemkotnika

Osem diagonal je najkrajših, vsaka od njih ima dolžino d_m, ki jo izračunamo iz pravokotnega trikotnika FXD (slika 13):

$$d_m^2 = |FX|^2 + |XD|^2 = |FX|^2 + |XC|^2 = \frac{a^2}{4}(\psi+1)^2 + \frac{a^2}{4}(\psi-1)^2 = \frac{a^2}{2}(\psi^2+1).$$

Nazadnje lahko zapišemo: $d_m = a\sqrt{\psi+1}$. Najdaljša diagonala je $\sqrt{2}$–krat daljša od najkrajše. Dolžine diagonal v pravilnem osemkotniku so potemtakem:

$$d_m = a\sqrt{\psi+1},\ d = a\psi,\ d_M = a\sqrt{2(\psi+1)}.$$

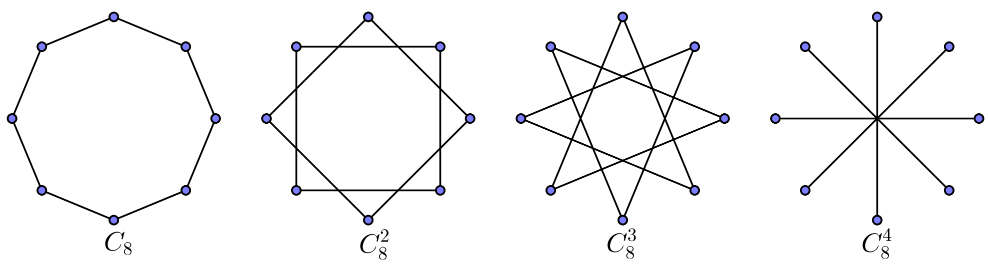
Njihovi kvadrati so:

$$a^2(\psi+1),\ a^2(2\psi+1),\ a^2(2\psi+2).$$

Produkt najkrajše in najdaljše diagonale pravilnega osemkotnika je enak njegovi ploščini:

$$d_m d_M = a^2\sqrt{(\psi+1)(2\psi+2)} = a^2\sqrt{2\psi^2+4\psi+2} =$$

$$= a^2\sqrt{8\psi+4} = 2a^2\sqrt{2\psi+1} = 2a^2\psi = 2ad = p.$$



Slika 14: Pravilen osemkotnik in njegove diagonale

Slika 14 kaže pravilni osemkotnik in posebej izrisane njegove diagonale. Pod slikami so zapisani simboli C_8^s za $s = 1, 2, 3, 4$. Simbol C_n^s, kjer je $1 \le s \le \lfloor n/2 \rfloor$, se v teoriji grafov uporablja za oznako tako imenovanih *cirkulantov*. Število s imenujemo *skok*. V posebnem primeru $s = 1$ običajno pišemo namesto C_n^1 kar C_n in govorimo o *cikličnem* grafu na n točkah, ki jih označujemo kar s številkami $0, 1, 2, \ldots, n-1$. V cikličnem grafu so povezave $(0,1), (1,2), \ldots, (n-2, n-1), (n-1, 0)$. V splošnem cirkulantu C_n^s sta povezani točki i in $i \pm s \pmod n$. Če pa število n ni tuje s, je cirkulant nepovezan graf. Slika 14 pokaže, da sta cirkulanta C_8^2 in C_8^4 nepovezana grafa. Prvega sestavljata dva ciklična grafa C_4, drugega pa štiri kopije polnih grafov na dveh točkah. To je v soglasju z dejstvom, da si števili 2 in 8 oziroma 4 in 8 nista tuji.

Graf C_8^3 je *osemkraka zvezda* ali *oktagram*. S tujko je pravilni osemkotnik *oktagon* (iz grških besed ὀκτώ, osem, γραμμή, črta, γωνία, kot, ogel).

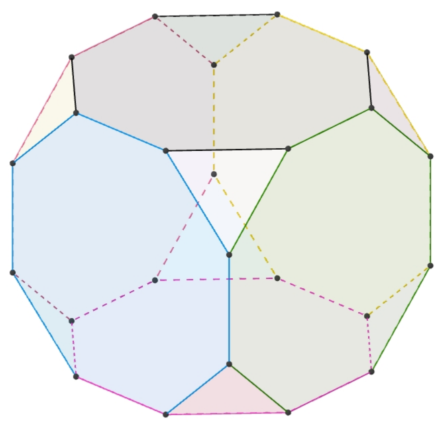
Pojem cirkulanta se da posplošiti tudi na več skokov. Beseda *skok* se uporablja zato, ker povezave ne povezujejo točk $0, 1, 2, \ldots, n-1, 0, 1, 2, \ldots$ po vrsti, ampak jih preskakujejo.

Notranji kot v pravilnem osemkotniku meri $3\pi/4$ ali $135°$, zunanji pa $\pi/4$ ali $45°$. Vsota vseh notranjih kotov je 6π ali $1\,080°$, vsota zunanjih kotov pa 2π ali $360°$.

Zanimivo je pogledati še kote med stranicami in diagonalami ter med samimi diagonalami v pravilnem osemkotniku. Kot med stranico in najkrajšo diagonalo meri $\pi/8$ ali $22°30'$. Kot med stranico in srednje dolgo diagonalo meri $\pi/4$ ali $45°$. Kot med stranico in najdaljšo diagonalo meri $3\pi/8$ ali $67°30'$. Kot med srednje dolgo in najdaljšo diagonalo z vrhom v oglišču tudi meri $\pi/8$. Kot med srednje dolgo in najkrajšo diagonalo z vrhom v oglišču meri $3\pi/8$. V notranjosti pravilnega osemkotnika se srednje dolgi diagonali sekata pod kotom $\pi/4$. V notranjosti pravilnega osemkotnika se srednje dolga in najdaljša diagonala sekata pod kotom $3\pi/8$. V notranjosti pravilnega osemkotnika se srednje dolga in najkrajša diagonala sekata pod kotom $3\pi/8$. V notranjosti pravilnega osemkotnika se najdaljši diagonali sekata pod kotom $\pi/4$, lahko pa tudi pravokotno. V notranjosti pravilnega osemkotnika se najkrajši diagonali sekata pod kotom $\pi/4$. V pravilnem osemkotniku najdaljša diagonala preseka najkrajšo pravokotno.

9 Prisekana kocka

Prisekana kocka je eno od trinajstih arhimedskih teles. Ima 24 oglišč, 36 robov in 14 ploskev, od teh 8 skladnih enakostraničnih trikotnikov in 6 skladnih pravilnih osemkotnikov. Telo dobimo iz kocke, ki ji prirežemo oglišča z enakostraničnimi trikotniki, tako da nastanejo na kockinih kvadratih pravilni osemkotniki (slika 15).



Slika 15: Prisekana kocka

Če je s rob kocke, ki jo prirežemo, potem ima v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$ kocka oglišča v točkah $(\pm s/2, \pm s/2, \pm s/2)$. To je ravno 8 točk, kar se ujema s številom oglišč kocke. Nastala prisekana kocka pa ima oglišča v točkah

$$(\pm\psi^{-1}s/2, \pm s/2, \pm s/2),\ (\pm s/2, \pm\psi^{-1}s/2, \pm s/2),\ (\pm s/2, \pm s/2, \pm\psi^{-1}s/2).$$

Vseh možnosti je 24, kar se ujema s številom oglišč prisekane kocke. Oglišča v koordinatni obliki nam lahko veliko pomagajo pri računalniški konstrukciji prisekane kocke.

10 Krogle, zložene v kvadratno piramido

Enako velike krogle lahko zložimo v skladovnice na različne načine. Ena od možnosti je zlaganje v kvadratno piramido. Osnovna plast ima n^2 krogel, naslednja $(n-1)^2$, vse do vrha, ki ima samo eno, ki se dotika štirih pod njo. Vseh krogel v taki skladovnici je

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Do te formule pridemo, če uporabimo enakost

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Če levo in desno stran presumiramo po indeksu k od 1 do n, dobimo:

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Od vsote na levi strani enačaja ostaneta samo dva člena, druga vsota na desni pa je znana vsota prvih n zaporednih naravnih števil, ki je enaka $n(n+1)/2$:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n.$$

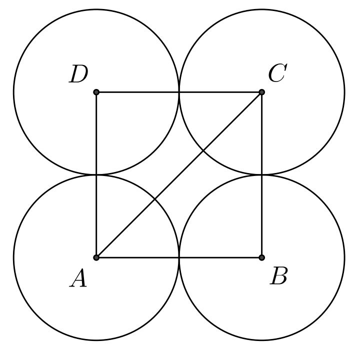
Iz te enakosti dobimo:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 4n - 3n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Ko izraza na levi in desni še delimo s 3, dobimo končni rezultat, ki ga lahko za vsak primer dokažemo še z metodo matematične indukcije.

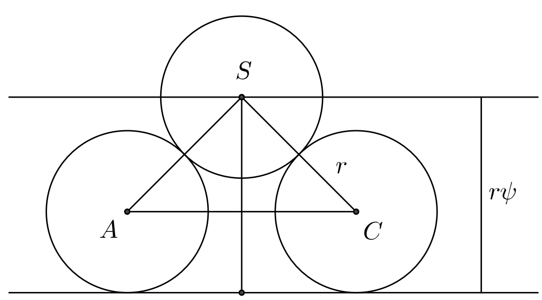
Tako lahko hitro izračunamo število vseh krogel, če vemo, da je na robu prve plasti n krogel. Krogle sosednih plasti se morajo dotikati, zato nas zanima,



Slika 16: Štiri krogle v isti plasti, pogled od zgoraj

na kakšnih višinah so središča krogel v posamezni plasti. Polmer vsake krogle naj bo r.

Središča $ABCD$ štirih krogel so v plasti oglišča kvadrata s stranico $2r$, kot kaže slika 16. Zato je $|AC| = 2r\sqrt{2}$. V naslednji plasti te 4 krogle nosijo kroglo s središčem S, Presek z ravnino skozi točke A, C, S kaže slika 17.

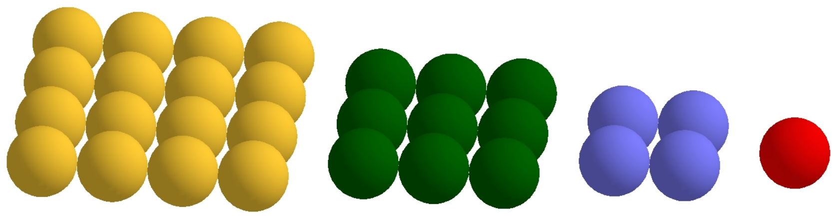


Slika 17: Pogled od strani s kroglo v naslednji plasti

Trikotnik ACS je enakokrak z osnovnico $2r\sqrt{2}$ in krakoma dolžine $2r$. Kot ob vrhu s je pravi, ker velja Pitagorov izrek za trikotnik ACS:

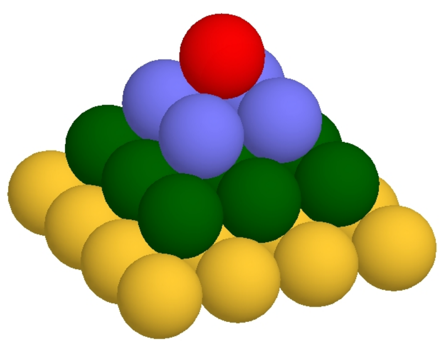
$$(2r)^2 + (2r)^2 = 8r^2 = (2r\sqrt{2})^2.$$

Zato je točka S od daljice AC oddaljena za $2r\sin(\pi/4) = r\sqrt{2}$. Od skupne spodnje tangentne ravnine štirih krogel je torej središče pete krogle, ki jo nosijo, oddaljeno za $r + r\sqrt{2} = r\psi$.



Slika 18: Plasti krogel, ki jih zložimo v kvadratno piramido

Slika 18 kaže plasti enakih krogel, ki jih potem zložimo v kvadratno piramido. Osnovna plast vsebuje $4 \times 4 = 16$, naslednja $3 \times 3 = 9$, naslednja $2 \times 2 = 4$ in zadnja 1 kroglo. Število vseh krogel v piramidi je po splošnem obrazcu $4 \cdot 5 \cdot 9/6 = 30$.



Slika 19: Krogle, zložene v kvadratno piramido

Vsaka krogla višje plasti se dotika štirih krogel plasti pod njo. S problemi zlaganja enakih krogel v skladovnice različnih oblik se je ukvarjal topničar in matematik Jurij Vega (1754–1802). Razvil je formule, po katerih so lahko vojaki hitro izračunali, koliko topovskih krogel, ki so v Vegovem času zares imele obliko krogel, imajo v skladovnici.

11 Srebrno število kar tako

Srebrno število ψ se tu pa tam pojavi tudi v analizi, denimo v rezultatih integracije. Pokažimo to na primeru ploščin.

Primer 1. Izračunajmo ploščino p lika pod krivuljo $y = a^2/\sqrt{a^2+x^2}$ nad intervalom $[-a, a]$, kjer je a pozitivno število (slika 20). Ploščino izračunamo z integralom:

$$p = \int_{-a}^{a} \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Ker je pod integralskim znakom soda funkcija, lahko zapišemo

$$p = 2a^2 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Z uvedbo nove integracijske spremenljivke $t = x/a$ dobimo

$$p = 2a^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2a^2 \ln(t + \sqrt{1+t^2})\Big|_0^1 = 2a^2 \ln(1+\sqrt{2}).$$

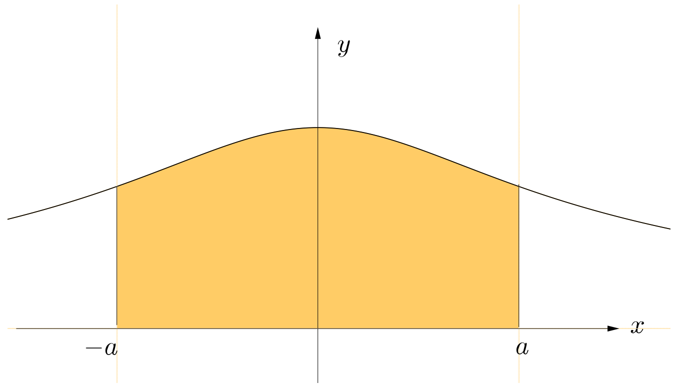
Ploščina lika je torej $p = 2a^2 \ln \psi$.

Primer 2. Ploščino p lika, ki je omejen z obema vejama hiperbole (slika 21) $y^2 - x^2 = a^2,\ a > 0$, na intervalu $[-a, a]$ izračunamo z integralom:

$$p = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2+x^2}\,dx.$$

Ker je pod integralskim znakom soda funkcija, je laže izračunati

$$p = 4\int_0^a \sqrt{a^2+x^2}\,dx.$$

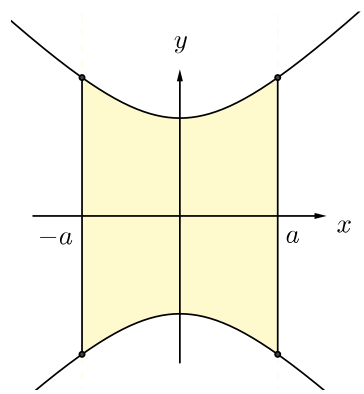


Slika 20: Ploščina lika pod krivuljo

Z uvedbo nove integracijske spremenljivke $t = x/a$ dobimo

$p = 4a^2 \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = 2a^2(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}))\Big|_0^1 = 2a^2(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

Nazadnje imamo rezultat: $p = 2a^2(\psi - 1 + \ln\psi) = 2a^2 \ln(\psi e^{\psi-1})$.



Slika 21: Lik med vejama hiperbole

Primer 3. Izračunajmo ploščino p lika pod krivuljo $y = \ln(1+x^2/a^2)\sqrt{a^2 - x^2}$ nad intervalom $[-a, a]$ (slika 22). Pri tem je a pozitivna konstanta. Izračunati je treba

$$p = \int_{-a}^{a} \ln(1 + x^2/a^2)\sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Integrala se ne da izračunati samo z osnovnima metodama: per partes in substitucijo. Opravka imamo s sodo funkcijo. S substitucijo $x = at$ dobimo

$$p = 2a^2 \int_0^1 \ln(1+t^2)\sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Vpeljemo parameter $s \geq -1$ in izračunajmo nekoliko splošnejši integral

$$I(s) = 2\int_0^1 \ln(1+st^2)\sqrt{1-t^2}\, dt.$$

Očitno je $I(0) = 0$. Odvajamo:

$$I'(s) = 2\int_0^1 \frac{t^2\sqrt{1-t^2}\, dt}{1+st^2}.$$

Dobljeni integral se da izračunati elementarno. Dobimo:

$$I'(s) = \frac{\pi(s+2-2\sqrt{s+1})}{2s^2}.$$

Z integracijo pridemo do naslednjega rezultata:

$$I(s) = \pi\ln(\sqrt{s+1}+1) + \frac{\pi(\sqrt{s+1}-1)}{s} + C.$$

Drugi člen ima limito $\pi/2$ v točki $s = 0$, tako da lahko določimo integracijsko konstanto C iz relacije:

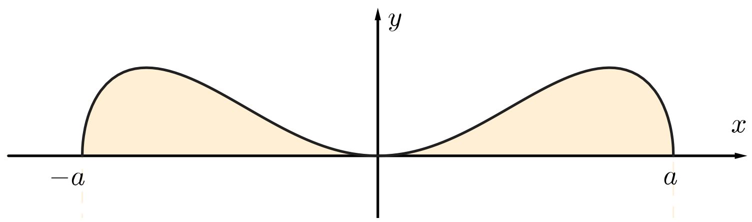
$$I(0) = \pi\ln 2 + \frac{\pi}{2} + C = 0.$$

Nazadnje imamo:

$$I(s) = \pi\left(\ln\frac{\sqrt{s+1}+1}{2} + \frac{2\sqrt{s+1}-s-2}{2s}\right).$$

Iskana ploščina je $I(1)$, torej

$$p = \pi\left(\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right) = \pi\left(\ln\frac{\psi}{2} - \frac{5-2\psi}{2}\right),$$



Slika 22: Še ena ploščina lika pod krivuljo

kar je približno $p \approx 0.3218246551a^2$.

Primer 4. Podobno, kot smo z odvajanjem po parametru zvito izračunali integral v prejšnjem primeru, izračunamo tudi

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc}\tan x\, dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Vpeljemo realen parameter q in integral s tem parametrom:

$$J(q) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc}\tan qx\, dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Očitno je $J(0) = 0$. Odvajamo in dobljeni integral izračunamo:

$$J'(q) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+q^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+q^2}}.$$

Videti je smešno: prej smo odvajali, sedaj pa nazaj integriramo, kar obrodi rezultat. Dobimo namreč

$$I(q) = \frac{\pi}{2}\ln(q + \sqrt{1+q^2}) + C.$$

Ker je $I(0) = 0 + C = 0$, je dokončno

$$I(q) = \frac{\pi}{2}\ln(q + \sqrt{1+q^2}).$$

Za poseben primer $q = 1$ dobimo

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc}\tan x\, dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}\ln\psi.$$

12 Osebna izkaznica števila osem

Navedimo nekaj lastnosti števila 8 v smislu prispevka [8]. Število 8 je sodo. Najbližje praštevilo pod njim je 7, nad njim pa 11. Zapis v nekaterih drugih številskih sistemih je:

$$8 = [1000]_2 = [22]_3 = [20]_4 = [13]_5 = [12]_6 = [11]_7 = [10]_8.$$

Število 8 je palindromno v trojiškem in sedmiškem sistemu. Število 8 je v rimski obliki VIII, v hindijski pa ८.

Delitelji števila 8 so 1, 2, 4 in 8. Vsota vseh deliteljev števila 8 je $\sigma(8) = 15$, vsota pravih deliteljev pa $\sigma^*(8) = 7$. Število 8 je zato deficientno. Eulerjeva funkcija, ki pove, koliko števil od 1 do 7 je tujih 8, ima vrednost $\varphi(8) = 4$. Število 8 je vsota dveh kvadratov: $8 = 2^2 + 2^2$. Ker 8 je oblike $x^y + y^x$, je Leylandovo število. Število 8 je kubično: $8 = 2^3$. Število 8 je močno, ker ga deli kvadrat njegovega prafaktorja, to je 2. Število 8 je Fibonaccijevo: $8 = F_6$. Število 8 je dvojna faktoriela: $8 = 4!! = 2 \cdot 4$. Število 8 je drugo osemkotniško in drugo središčno sedemkotniško število:

$$P_2^{(8)} = 2 + (8-2)T_1 = 8 + 6 \cdot 1 = 8,\ S_2^{(7)} = 1 + 7T_1 = 1 + 7 = 8.$$

Število 8 je kateta pitagorejskega trikotnika $a = 8, b = 6, c = 10$. Kvadratni koren števila 8 lahko izrazimo s srebrnim razmerjem: $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2(\psi - 1)$.

13 Pravilni osemkotnik v praksi

Obliko pravilnega osemkotnika ima v prometu znak stop. To je edini prometni znak s tako obliko. To pa zato, da vozniki tudi iz nasprotne smeri vedo, da gre za znak stop.

Slika 23: Znak v križišču, pred katerim mora voznik vozilo ustaviti

Glavni del običajnega dežnika ima na napere pritrjeno platno, ki ima v razpetem stanju obliko, ki zelo podobna pravilnemu osemkotniku.

Slika 24: Dežnik nam pogosto prav pride

Ploskve nekaterih poliedov so pravilni osemkotniki, na primer pravilne prizme, antiprizme, prisekani kubooktaeder.
Zgradbe, tudi sakralni objekti, in sobe v tlorisu (glej [9]) imajo pogosto obliko pravilnega osemkotnika, pa tudi stropi in ravninski preseki raznih posod in tehničnih naprav.
Prav za konec pa cenjeno bralko in dragega bralca vabim, da vzame v roke štiri liste formata A4 (lahko iz kupa odpadnega papirja), naj od njih odstriže kvadrat v slogu slike 4, in z merjenjem preveri, da je dobil srebrne pravokotnike. Položi naj jih enega vrh drugega tako, da bo dobil pravilni osemkotnik. Iz kvadratov pa naj s prepogibanjem tudi naredi pravilne osemkotnike in vse primerja glede na njihovo skladnost.

Literatura

[1] K. Devlin, *The Man of Numbers: Fibonacci's Arithmetic Revolution*, Bloomsbury Publishing, London in drugje, 2011.

[2] A. Dokler, *Šolski grško–slovenski slovar*, Založba ZRC, ZRC SAZU, Ljubljana 2015.

[3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2008.

[4] A. F. Horadam, *Pell Identities*, Fibonacci Quart. **17** (1), (1979), 71–77.

[5] E. Kilic, D. Tasci, *The Linear Algebra of the Pell Matrix*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **11** (3), (2005), 163–174.

[6] V. W. de Spinadel, *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Libreria, Buenos Aires 1998.

[7] H. S. Wilf, *Generatingfunctionary*, Academic Press, Boston in drugje 1990.

[8] M. Razpet, *Osebne izkaznice nekaterih števil*,
`http://pefprints.pef.uni-lj.si/3365/1/Osebne_izkaznice.pdf`
(dosegljivo 10.3.2016)

[9] Wikipedia, *List of octagonal buildings and structures*,
`https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_octagonal_buildings_and_structures`
(dosegljivo 10.3.2016)