Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo
Katedra za algebro in analizo

Marko Razpet

MATEMATIČNO IZRAZJE SKOZI ČAS

Študijsko gradivo

Zgodovina matematike

Ljubljana, april 2015

Vsebina

Predgovor

Matematično izrazje, kakršno uporabljamo danes, se v marsičem razlikuje od tistega, ki je bilo v veljavi pred dva tisoč leti ali pa celo od tistega iz prejšnjega stoletja. Sam razvoj matematike narekuje, da je treba od časa do časa kakšno besedo ali besedno zvezo spremeniti, ker ne ustreza več dejanskemu stanju. Seveda pa je treba kar naprej dodajati nove. Velikokrat se kakšen matematični objekt ali izrek imenuje po znanem matematiku, a se izkaže, da poimenovanje ni ustrezno. Gradivo skuša z nekaj primeri pokazati, kako in zakaj se je to zgodilo. V matematiki obstajajo tudi besede ali besedne zveze, ki se uporabljajo za popolnoma različne stvari. Pri teh moramo biti še posebej pozorni.

Velik del matematičnega izrazja je grškega ali latinskega izvora. Nekatere besede so bolj ali manj posrečeno prevedli v nacionalne jezike. Slovenci smo dobili svojo prvo popolnejše matematično izrazje sredi 19. stoletja. V njem bi imeli še več besed s slovensko osnovo, a se nekateri predlogi niso prijeli. Za *kvadrat* je bil na primer predlagan izraz *štirjak*, za *paralelogram* pa *vštričnik*. Grške in ruske besede v pričujočem gradivu smo zapisali kar z ustreznima pisavama.

Na koncu gradiva je zbranih nekaj matematičnih besed in besednih zvez v slovenščini, angleščini, nemščini, francoščini in ruščini. Tam lahko sami presodimo, koliko so ustrezne, lepe in domiselne. Opazimo, da so se Rusi zelo potrudili, da bi našli svoje izraze. To jim ni v celoti uspelo, kakor tudi ne nam Slovencem, a bili so pri tem zelo ustvarjalni. Zanimivo bi bilo pogledati še druge jezike. Madžari so na primer prevedli besedo *grupa* v *csoport*, Poljaki pa *integral* v *całka*.

Skozi zgodovino so se menjavali tudi matematični simboli, a zanje bi morali napisati posebno razpravo. Za števke so hitro našli simbole, za računanje pa ne. Dolgo časa so vsa matematična besedila pisali z besedami naravnega jezika. Sledili so nekakšni simboli, ki pa so bili bolj okrajšave, začetnice besed. Za primer navedimo, da je enačaj $=$ uvedel šele Robert Recorde (1512–1558).

Ljubljana, aprila 2015 Dr. Marko Razpet

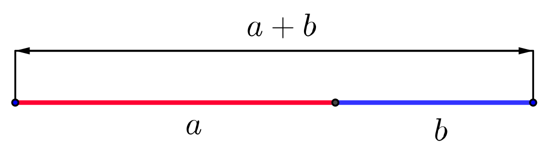
1 Zlato razmerje

Zlati rez, zlato razmerje in *zlato število* so izrazi, ki se marsikomu zdijo znani in domači. Ko izvemo, da so jih dobro poznali v renesančni umetnosti in celo v zlati dobi antične Grčije, se nam zazdi, da so omenjeni izrazi zelo stari. Pa vendar ni tako. Najprej nam pride na misel, da bi pogledali v Evklidove Elemente (Στοιχεῖα). In kaj ugotovimo?

V 6. knjigi Elementov Evklid (Εὐκλείδης) definira *zlato razmerje*, ki mu pravi ἄκρος καὶ μέσος λόγος. Dobesedno se v stari grščini njegova definicija glasi:

β′. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὣς ἣ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττὸν.

To pomeni v prostem prevodu: *Pravimo, da je daljica razdeljena v skrajnem in srednjem razmerju, če je razmerje cele daljice proti daljšemu odseku enako daljšemu odseku proti krajšemu.* Izraz ἄκρος καὶ μέσος λόγος, kar pomeni *skrajno in srednje razmerje*, se v Elementih pojavi velikokrat. Ni pa v njih ne sluha ne duha po kakšnem *zlatu*. Pogosto je pod pojmom *daljica* mišljena njena dolžina. Poglejmo nekoliko podrobneje, kako je s tem.



Slika 1: Daljica, razdeljena v zlatem razmerju

Daljši odsek daljice naj bo dolg a, krajši pa b. Po definiciji skrajnega in srednjega razmerja mora torej veljati relacija:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Prepišimo jo v obliko

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Označimo $\tau = a/b$. To število imenujemo *zlato število* oziroma *zlato razmerje*. Označujejo ga tudi s črko ϕ. Potem zgornjo relacijo lahko zapišemo kot

$$1 + \frac{1}{\tau} = \tau$$

oziroma

$$\tau^2 = \tau + 1.$$

Dobili smo kvadratno enačbo, ki jo znamo rešiti:

$$\tau_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Seveda upoštevamo le pozitivno rešitev, tako da je nazadnje:

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Približna vrednost je $\tau \approx 1.618033988$. Število τ je iracionalno. Nam je to jasno na prvi pogled. V antičnih časih pa so že dokazovali z metodo protislovja. Ponovimo, kako so dokazali, da τ ni racionalno število.

Če predpostavimo, da je τ racionalno število, potem ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek: $\tau = m/n$. To pomeni, da sta m in n naravni števili brez skupnih faktorjev. Njun največji skupni delitelj je $D(m, n) = 1$. Iz osnovne relacije, ki ji zadošča število τ, dobimo po tej predpostavki relacijo:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m + n}{m}.$$

Če je $D(m, n) = 1$, je tudi $D(m+n, m) = 1$. Če bi bil namreč vsemu navkljub veljalo $d = D(m + n, m) > 1$, bi število d hkrati delilo m in $m + n$. Toda tedaj bi število d delilo tudi n. To pa ne gre, ker smo vzeli $D(m, n) = 1$. Zato je tudi $(m + n)/m$ okrajšan ulomek. Če pa sta dva okrajšana ulomka enaka, se ujemata v števcih in imenovalcih. Dobili bi $n = m$ in $m + n = m$. Toda druga relacija v naravnih številih nikdar ne velja. To dokazuje, da število τ ni racionalno.

Kako pa vemo, da se enaka okrajšana ulomka ujemata v števcih in imenovalcih? Vzemimo, da za naravna števila p, q, r, s, pri čemer je $D(p, q) = D(r, s) = 1$, zadoščajo relaciji

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}.$$

Potem velja $ps = qr$. Ker p deli qr in je $D(p, q) = 1$, po znanem izreku p deli r. Ker pa tudi r deli ps in je $D(r, s) = 1$, iz istega razloga kot prej r deli p. To pa gre samo, če je $p = r$. Potem pa je tudi $q = s$.

Zlato razmerje nastopi v pravilnem petkotniku. Razmerje diagonale in stranice v njem je ravno τ. V pravilnem petkotniku lahko obravnavamo *zlati trikotnik*. To omogoča preprosto konstrukcijo pravilnega petkotnika s šestilom in neoznačenim ravnilom. Najdemo ga posledično tudi v pravilnem ikozaedru in dodekaedru. Vpeljana sta tudi *zlati pravokotnik* in *zlata spirala*.

V obdobju renesanse se je za zlato razmerje pojavil izraz *divina proportione*, v nemščini *göttliche Proportion*, kar pomeni *božansko razmerje*. Šele Martin Ohm (1792–1872) je skoval današnji izraz *zlato razmerje*. Martin Ohm je bil brat bolj znanega fizika Georga Ohma (1789–1854), po katerem smo dobili *Ohmov zakon* in enoto za električno upornost *ohm*, Ω.

V naših geometrijskih učbenikih najdemo za *zlato razmerje* tudi izraz *stalno razmerje*, v nemščini *stetige Proportion*.

2 Podgrupa edinka

Grupa je pomembna algebrska struktura. To ni samo množica nekih elementov G, ampak je v njej definirana neka operacija $\circ$, ki katerima koli elementoma $a, b \in G$ priredi natančno določen element $c \in G$, ki ga zapišemo kot $c = a \circ b$. To še ni dovolj, da bi G imenovali grupa. V G mora veljati za operacijo $\circ$ zakon asociativnosti, kar pomeni, da je za vse $a, b, c \in G$ izpolnjena enakost $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. Nadalje mora v G obstajati enota e, ki z operacijo $\circ$ pusti vse elemente $a \in G$ pri miru, kar pomeni, da za vse $a \in G$ veljata enakosti $e \circ a = a \circ e = a$. Tudi to še ni dovolj. V G mora vsak element a imeti inverzni element a^{-1}, za katerega je $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. S tem smo pravzaprav našteli aksiome grupe. Lahko se zgodi, da je za vse $a, b \in G$ izpolnjena enakost $a \circ b = b \circ a$. Če je tako, je G *komutativna* ali *Abelova grupa*. Pogosto pišemo grupno operacijo multiplikativno, namesto $\circ$ pišemo $\cdot$ ali pa še tega ne, torej kar ab namesto $a \circ b$ oziroma $a \cdot b$.

Niels Henrik Abel (1802–1829) je bil norveški matematik, po katerem so poimenovali komutativne grupe. Leta 2001 so Norvežani Abelu v čast ustanovili *Abelovo nagrado*, ki jo podeljuje sam norveški kralj. Prvo Abelovo nagrado je prejel leta 2003 francoski matematik Jean-Pierre Serre. Abel je v svojem kratkem življenju veliko naredil za matematiko. Morda se ga še najbolj spominjamo po izreku, ki trdi, da se splošne algebrske enačbe n-te stopnje ne da rešiti z osnovnimi štirimi aritmetičnimi operacijami in korenjenji, če je $n \geq 5$. To je *Abel-Ruffinijev izrek*. Paolo Ruffini (1765–1822) je ta izrek, seveda ne pod svojim imenom, poznal, a ga pomanjkljivo dokazal, Abel pa ga je do konca izpilil.

Évariste Galois (1811–1832) je padel v dvoboju. V svojem življenju, ki je bilo še krajše od Abelovega, je doumel pravi pomen grup. Vedel je, kdaj je dana algebrska enačba rešljiva z osnovnimi štirimi aritmetičnimi operacijami in korenjenji. V moderni algebri so njemu v čast poimenovali končne obsege v *Galoisove obsege*. Galoisov obseg je komutativen, kar ni prav lahko dokazati. Pravijo, da je vsak Galoisov obseg *Galoisovo polje*.

Pomena grup so se zavedali tudi Lagrange in Cauchy. Beseda *grupa* ima sicer nekaj germanske etimologije, ki pa ni posebno zanimiva. Vedno je pomenila nekaj takega kot *skupina, kup, nekaj zaokroženega*.

Pri vsaki algebrski strukturi nas zanimajo podstrukture, pri grupi pač *podgrupe*. Množica $H \subseteq G$ je podgrupa grupe G, če je H že sama grupa za isto operacijo $\circ$ kot G. Vsaka grupa G z enoto e ima za podrupo $\{e\}$. Pri končni grupi G moč katerekoli njene podrupe H deli moč grupe G. Kvocient moči grupe G in moči podrupe H imenujemo *indeks* podgrupe H v grupi G. Če je $a \in G$ (G bomo pisali multiplikativno), potem lahko definiramo

$$aHa^{-1} = \{aha^{-1}, h \in H\}.$$

Množica aHa^{-1} je podgrupa v G. Pravimo ji *konjugiranka* podgrupe H, ki ustreza $a \in G$. Če se vse konjugiranke podgrupe H ujemajo s H, to se pravi $aHa^{-1} = H$ za vsak $a \in G$, potem je H *podgrupa edinka* ali *invariantna podgrupa* grupe G, s simboli $H \triangleleft G$. Vsaka grupa G ima za edinki vsaj $\{e\}$ in G. Če ima G samo ti dve edinki, je G *enostavna grupa*.

Nenadoma smo se srečali s celim kupom izrazov, od katerih je večina tujega izvora. To za marsikaterega študenta predstavlja precejšnjo oviro v razumevanju teorije grup. Kot da še ni dovolj, nekateri invariantno podgrupo imenujejo *normalna podgrupa*, v angleščini *normal subgroup*, v nemščini *Normalteiler*, v ruščini pa нормальная подгруппа.

Profesor Josip Plemelj (1873–1967), svetovno znani matematik, prvi rektor ljubljanske univerze, je dolga leta predaval tudi teorijo grup. Včasih je uporabljal kar besedo *skupina* namesto *grupa*. Tu in tam je uporabljal gotske črke. Tak je njegov del besedila v [5], ki obravnava podgrupe edinke.

Vprašajmo, koliko konjugiranih podgrup k podgrupi $\mathfrak{B}$ dobimo, če vzamemo iz $\mathfrak{A}$ vse A in tvorimo $A^{-1}\mathfrak{B}A$. Videli bomo, da ne dobimo več kakor zgornje konjugiranke. Vsak element A leži v enem odseku $\mathfrak{B}T$, vsi elementi istega odseka pa dajo isto konjugirano podskupino $T^{-1}\mathfrak{B}T$. Če je namreč $A = BT$, potem je

$$A^{-1}\mathfrak{B}A = (BT)^{-1}\mathfrak{B}BT = T^{-1}B^{-1}\mathfrak{B}BT = T^{-1}\mathfrak{B}T.$$

Če ima $\mathfrak{B}$ indeks j v grupi $\mathfrak{A}$, potem imamo le že navedene konjugiranke v številu j. Toda niti te konjugiranke ni treba, da so med seboj različne. More jih biti tudi nekaj med seboj enakih in so celo posebno važne take podskupine $\mathfrak{B}$, pri katerih so vse konjugiranke med seboj enake. Take podskupine $\mathfrak{B}$ bomo imenovali *edinke*. Podskupina edinka ima tedaj lastnost, da je $A^{-1}\mathfrak{B}A = \mathfrak{B}$ za vsak element A iz $\mathfrak{A}$. Če je grupa $\mathfrak{A}$ razstavljena na odseke po kaki podgrupi edinki, imenuje take razstave Galois *décomposition propre*. V nemški literaturi se imenuje edinka *ausgezeichnete* ali *invariante Untergruppe, Normalteiler der Gruppe*; Angleži jo imenujejo *sebi konjugirano podgrupo – selfconjugate*.

3 Verižni ulomki

Neskončni verižni ulomek je matematični izraz oblike

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Pri tem so $a_1, a_2, a_3, \ldots$ naravna števila, a_0 pa naravno število ali 0. Da ne bi imeli težav s pisanjem verižnega ulomka v nadstropja, pogosto uporabljamo zapis

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Število a_0 je *celi del* verižnega ulomka.

Končni verižni ulomki $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ niso zanimivi. Vsako pozitivno racionalno število lahko izrazimo v obliki končnega verižnega ulomka. Če je zadnje število a_n večje od 1, celo na dva načina. Primer:

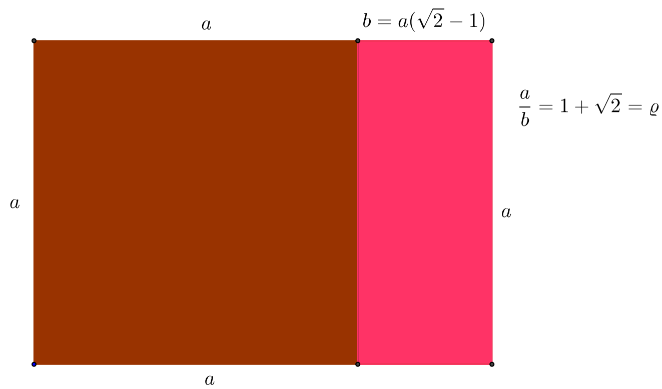
$$\frac{8}{3} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}.$$

To pomeni, da lahko pišemo v krajši obliki:

$$\frac{8}{3} = [2; 1, 2] = [2; 1, 1, 1].$$

Verižni ulomki so v angleščini *continued fractions*, v nemščini *Kettenbrüche*, v ruščini цепные дроби, pa tudi непрерывные дроби. Na Otoku je matematika ubirala nekoliko svojo pot, zato je včasih nekaj razlik v poimenovanju matematičnih pojmov s tistimi na evropskem kontinentu. Kdor se prvič sreča z matematično literaturo v angleščini, se mu zdi kak izraz domač, a ga lahko popolnoma napačno prevede. Zgodilo se je, da so *continued fractions* postali *kontinuirane frakcije*. Glagol *continue* pomeni *nadaljevati, vztrajati, obdržati*. *Continued fractions* so na neki način *nadaljevani, neprekinjeni ulomki*. Verjetno nam izraz *verižni ulomek*, ki smo ga dobesedno prevedli iz nemščine, pove veliko več. Na zavidljiv visok nivo je teorijo verižnih ulomkov postavil Joseph-Louis de Lagrange. Pomembno vlogo igrajo na primer pri reševanju *Pellove enačbe*.

Za matematično teorijo so pomembni razvoji *kvadratnih iracional*, to se pravi števil oblike $a + b\sqrt{D}$, kjer sta a in b pozitivni racionalni števili in D naravno število, ki ni kvadrat nobenega naravnega števila, v verižni ulomek. V tem primeru dobimo *periodični verižni ulomek*, kar pomeni, da se nam neka skupina števil $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ začne ponavljati.



Slika 2: Pravokotnik, ki ima stranici v srebrnem razmerju

Zanimiv je verižni ulomek za *zlato razmerje*. Ker zanj velja zveza $\tau = 1 + 1/\tau$, hitro ugotovimo, da ga lahko zapišemo s samimi enicami:

$$\tau = [1; 1, 1, 1, \ldots].$$

To je, popularno povedano, v skladu s tem, da prvi na tekmovanju dobi *zlato medaljo*. Potemtakem bi lahko govorili tudi o *srebrnem razmerju*

$$\varrho = [2; 2, 2, 2, \ldots],$$

pa tudi o *bronastem razmerju*

$$\sigma = [3; 3, 3, 3, \ldots].$$

Zanju veljata relaciji:

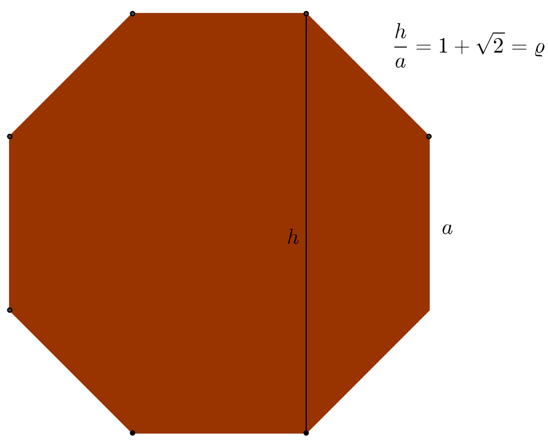
$$\varrho = 2 + \frac{1}{\varrho}, \ \sigma = 3 + \frac{1}{\sigma}.$$

Ko rešimo ustrezni kvadratni enačbi, dobimo:

$$\varrho = 1 + \sqrt{2}, \ \sigma = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Do srebrnega razmerja pridemo, če vzamemo pravokotnik, ki ima stranici v razmerju $\sqrt{2} : 1$, na primer pisarniški list papirja formata A4, in mu odrežemo največji možni kvadrat. Ostanek je pravokotnik, ki ima stranici v razmerju ϱ (slika 2).

Zlato razmerje je v tesni zvezi s Fibonaccijevim zaporedjem in pravilnim petkotnikom. Srebrno razmerje ϱ pa najdemo v pravilnem osemkotniku. Hitro se lahko prepričamo, da je razmerje med višino h in stranico a pravilnega osemkotnika enako $\varrho = \cot(\pi/8) = 1+\sqrt{2}$. Kvadrat srebrnega razmerja je $\varrho^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Zanimivo je, da koeficienta $x = 3$ in $y = 2$ v tem številu zadoščata Pellovi enačbi $x^2 - 2y^2 = 1$.

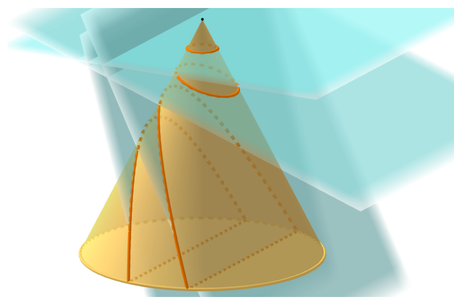


Slika 3: Pravilni osemkotnik

4 Stožnice

Stožnice so ravninske krivulje, ki nastanejo kot ravninski preseki dvojnega stožca, ki ga obravnavamo kot neomejeno ploskev, in sicer kot plašč neomejenega polnega dvojnega stožca. Katero stožnico dobimo, je odvisno od kota med ravnino, s katero ga sekamo, in njegovo osjo. Če ravnina ne poteka skozi vrh stožca, lahko dobimo elipso, krožnico, parabolo, hiperbolo. Pri slednji dejansko potrebujemo dvojni stožec, da dobimo obe veji. Če bi ravnina potekala skozi vrh stožca, bi dobili degenerirane primere stožnic: točko, dve sekajoči se premici in dvakrat šteto premico.

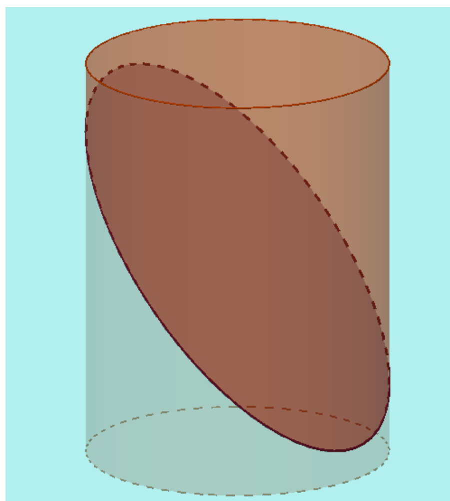
V naši starejši matematični literaturi so uporabljali namesto izraza *stožnice* izraz *stožernice*, pa tudi *stožkosečnice*. Za sam stožec so nekoč uporabljali pod vplivom nemščine tudi besedo *kegelj*. Današnji keglji pri kegljanju nas prav nič ne spominjajo na stožec. Vse, kar imata tak kegelj in stožec skupnega, je rotacijska simetrija. Angleži rečejo stožnici *conic section* ali samo *conic*, Nemci *Kegelschnitt*, Rusi коническое сечение, Čehi *kuželosečka*.



Slika 4: Nastanek stožnic

Zgodovina stožnic je dolga. Prvič jih srečamo v 4. stoletju pred našim štetjem pri starogrškem matematiku Menajhmu (380–320 pne., Μέναιχμος). Evklid je o njih baje napisal štiri knjige, a se žal nobena ni ohranila, Arhimed pa nam je zapustil o njih samo fragmente. Temeljito jih je študiral Apolonij iz Perge (262–190 pne., Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος), pa še nekateri drugi Grki. Apolonij je posameznim stožnicam dal imena: ἔλλειψις, ὑπερβολή, παραβολή. Imena odražajo njihove lastnosti, če jih zapišemo v skupni analitični obliki. Elipsi so Slovenci včasih rekli tudi *pakrog*.

Krožnico lahko obravnavamo kot poseben primer elipse, kot enakoosno elipso. Nekoč niso razlikovali med *krogom* in *krožnico*. Enako težavo imajo tudi Nemci: prvemu pravijo *Kreis*, krožnici pa *Kreislinie*. Krog je po današnjem pojmovanju množica točk, ki ležijo znotraj krožnice v njeni ravnini. Če smo natančni, moramo ločiti med *odprtim krogom*, ki robnih točk ne vsebuje, in *zaprtim krogom*, h kateremu štejemo tudi robne točke, torej krožnico, ki ga obdaja. Stari Grki so poznali za krog besede κίρκος, κύκλος, κρίκος. Slednjo je menda uporabljal Homer. Problem nastane, kako reči liku, ki ga obdaja elipsa. Salomonska rešitev je *eliptični disk*. Definicije likov, pri katerih ni popolnoma jasno, kaj spada zraven in kaj ne, so vedno sporne. Primer elipse še ni nič, že pri trikotniku so težave. Ali je to poln trikotnik ali njegov obod ali samo oglišča.



Slika 5: Elipsa kot ravninski presek valja

Kot zanimivost povejmo, da so Japonci precej neodvisno od drugih narodov ustvarjali svojo geometrijo, formulirali cel kup problemov, ki so jih z rešitvami lepo zapisali na lesenih ploščah, imenovanih *sangaku*. Te plošče so podarili svojim svetiščem. Problemi največkrat zahtevajo geometrijske konstrukcije, pri katerih se morajo krožnice, elipse in daljice med seboj dotikati pri predpisanih pogojih. Japonci so elipso poznali kot ravninski presek krožnega valja (slika 5).

5 Največji in najmanjši

Že v osnovni šoli smo se učili računati z ulomki. Preden smo se učili seštevati ulomke z različnimi imenovalci, smo obravnavali *največjo skupno mero* in *najmanjši skupni mnogokratnik* dveh naravnih števil. Danes jima rečemo *največji skupni delitelj* in *najmanjši skupni večkratnik*. Šele potem smo lahko dajali ulomke na *skupni imenovalec*. Tudi v kakšnem modrem pogovoru slišimo, da je *skupni imenovalec* tega in onega to in to, na primer: *Skupni imenovalec vseh težav na tem svetu je privatna lastnina*.

Že Evklid v Elementih uporablja izraz *največja skupna mera*, μέγιστον κοινὸν μέτρον. Tudi Angleži so uporabljali dobeseden prevod *greatest common measure*, kasneje so prešli na *greatest common divisor*. Nemci uporabljajo izraz *größter gemeinsamer Teiler*, Rusi pa наибольший общий делитель. Spomnimo se, da je največji skupni delitelj naravnih števil m in n največje naravno število $D(m,n)$ tako, ki hkrati deli m in n. Če je $D(m,n) = 1$, sta si števili m in n tuji. Največji skupni delitelj lahko poiščemo z *Evklidovim algoritmom*.

Najmanjši skupni večkratnik naravnih števil m in n je najmanjše naravno število $v(m,n)$ tako, ki je deljivo hkrati z m in n. Angleži najmanjšemu skupnemu večkratniku rečejo *least common multiple*, Nemci *kleinstes gemeinsames Vielfaches*, Rusi наименьшее общее кратное, Slovenci pa smo mu njega dni rekli *najmanjši skupni mnogokratnik*. Ni videti, da bi Evklid imel zanj poseben izraz, sicer pa je v grščini ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον. Med največjim skupnim deliteljem in najmanjšim skupnim večkratnikom velja preprosta zveza

$$D(m,n)v(m,n) = mn.$$

Če sta si števili m in n tuji, je $v(m,n) = mn$.

Brez težav lahko največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik definiramo tudi za več naravnih števil. Za tri naravna števila, denimo m, n, p, je

$$D(m,n,p) = D(D(m,n),p) = D(m,D(n,p)).$$

Prav tako velja

$$v(m,n,p) = v(v(m,n),p) = v(m,v(n,p)).$$

Ne velja pa v splošnem

$$D(m,n,p)v(m,n,p) = mnp,$$

kot bi marsikdo na hitro sklepal. Dovolj je en konkreten primer:

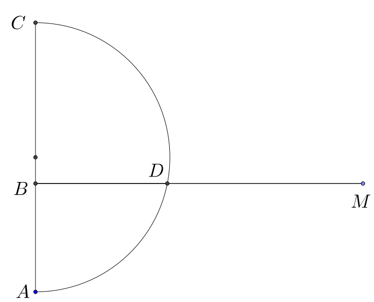
$$v(2,6,7) = 42,\ D(2,6,7) = 1,\ D(2,6,7)v(2,6,7) = 42 \neq 2 \cdot 6 \cdot 7 = 84.$$

6 Agnesin koder

Italijanska matematičarka, jezikoslovka in filozofinja Maria Gaetana Agnesi (1718–1799) je objavila leta 1748 v Milanu učbenik *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, po naše *Osnove analize za italijansko mladino*. Učbenik je bil posvečen avstrijski cesarici Mariji Tereziji (1717–1780), ki je takrat vladala tudi precejšnjemu delu Italije z Milanom vred.

Versiera je vpeljana na 380. strani prvega dela tega učbenika z besedami, med katerimi posodobimo le nekaj oznak (slika 6):

Dato il semicircolo ADC del diametro AC; si ricerca fuori di esso il punto M tale, che condotta MB normale al diametro AC, che taglierà il circolo in D, sia $|AB| : |BD| = |AC| : |BM|$, e perchè infiniti punti sono i punti M, che soddisfanno al problema, se ne domanda il luogo.



Slika 6: Slika k nalogi

To pomeni:

Dana je polkrožnica ADC premera AC. Iščemo tako točko M, da daljica MB, pravokotna na premer AC, seka krožnico v D, tako da je $|AB| : |BD| = |AC| : |BM|$. Ker je nešteto takih točk M, ki zadoščajo nalogi, se sprašujemo po njihovem geometrijskem mestu.

Nato izpelje enačbo krivulje in zaključi, da se imenuje *versiera*, po naše *verziera*. Koordinatni sistem Maria Agnesi postavi tako kot mi na sliki 7, le osi x in y med seboj zamenja. S tem je enačba polkrožnice $x^2 + y^2 = ax$ in $|BD| = \sqrt{ax - x^2}$. Vpelje $x = |AB|, y = |BM|$ in iz zahtevanega razmerja dobi enačbo

$$\frac{x}{\sqrt{ax - x^2}} = \frac{a}{y}.$$

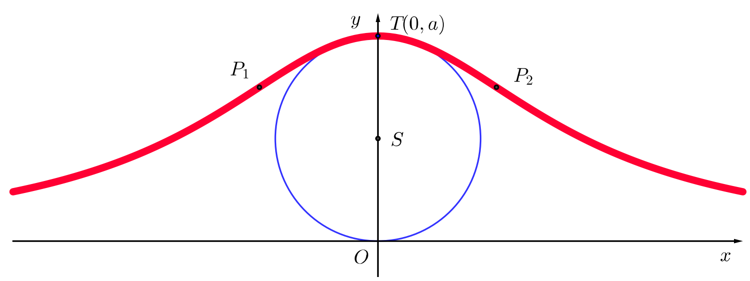
Iz tega izrazi

$$x = \frac{a^3}{a^2 + y^2}.$$

To je enačba iskane verziere, ki je očitno algebrska krivulja tretjega reda. Če njeno enačbo prepišemo za naš običajni koordinatni sistem, dobimo.

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2},\ a > 0.$$

Agnesin koder lahko zapišemo tudi v parametrični obliki, na primer



Slika 7: Agnesin koder

$$x = a \tan t,\ y = a \cos^2 t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Maria Agnesi opiše lastnosti krivulje. Največjo ordinato ima točka $T(0, a)$. Krivulja ima vodoravno asimptoto $y = 0$, je simetrična glede na os y in ima prevoja v točkah $P_1(-a/\sqrt{3}, 3a/4)$ in $P_2(a/\sqrt{3}, 3a/4)$. Krivulja ima v prevojnih točkah strmini $3\sqrt{3}/8$ oziroma $-3\sqrt{3}/8$. Pritisnjena krožnica v točki T

ima enačbo $x^2 + y^2 = ay$, polmer $a/2$ in leži med verziero in njeno asimptoto. Krožnica ograjuje krog s ploščino $P_p = \pi a^2/4$. Zgornja polkrožnica ima enačbo $y = a/2 + \sqrt{a^2/4 - x^2}$. Njeno središče je v točki $S(0, a/2)$. Za x, ki so majhni v primerjavi z a, dobimo razvoja v potenčno vrsto:

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} = a - \frac{x^2}{a} + \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^6}{a^5} + \ldots,$$

$$y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - x^2} = a - \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{a^3} - \frac{2x^6}{a^5} - \ldots$$

Ujemanje v prvih dveh členih ravno pomeni, da imata verziera in krožnica v točki T dotik drugega reda: skupno imata točko T, tangento v njej in krivinski polmer $a/2$.

Ploščina P lika med verziero in njeno asimptoto izračunamo z integralom:

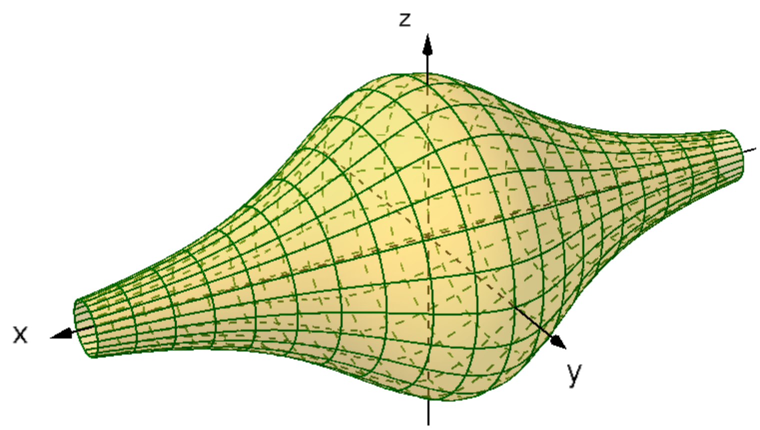
$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2 + x^2} = 2a^3 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \pi a^2.$$

Ta ploščina je štirikrat večja kot ploščina pritisnjenega kroga v točki T. Z rotacijo verziere okoli osi x nastane ploskev (slika 8), ki omejuje telo s prostornino

$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^6\,dx}{(a^2 + x^2)^2} = 2a^6 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{\pi^2 a^3}{2}.$$

Prostornina V je 3π-krat večja kot prostornina krogle, ki jo omejuje sfera, ki pri tej rotaciji nastane s pritisnjeno krožnico verziere v točki T.

Vsi računi v zvezi z verziero niso toliko zanimivi kot njeno ime. Maria Agnesi ji je baje dala tako ime na podlagi latinske besede *vertere*, ki pomeni *obračati, vrteti*. Iz nje izhaja tudi beseda *versoria*, kar pomeni neko vrv za upravljanje jader na jadrnici. V matematiki je znan tudi *obratni sinus*, *sinus versus*, tudi samo *versus* z oznako vers, ki je za kot φ definiran z relacijo $\operatorname{vers}\varphi = 1 - \cos\varphi$. John Colson (1680–1760), ki je zelo cenil učbenik Agnesijeve in se je celo naučil toliko italijanščine, da ga je prevedel v angleščino, izšel pa je šele leta 1801, je menil, da je beseda *versiera* krajša oblika za italijansko besedo *avversiera*, kar pa pomeni proti Bogu naravnano žensko,



Slika 8: Ploskev, ki nastane z rotacijo Agnesinega kodra okoli asimptote

hudičevko ali čarovnico, po angleško *witch*. Zato je verziero prevedel v *witch of Agnesi*, kar uporabljajo še danes. Sicer pa sta verziero poznala že Pierre de Fermat (1607–1665) in Luigi Guido Grandi (1671–1742). Slednji je uporabljal za verziero mornarjem znano latinsko besedo *versoria*, kar pomeni, da je morda že Agnesijeva nekaj zamešala v zvezi s to krivuljo.

7 Linearna funkcija

Linearna funkcija je zelo preprosta. Definirana je za vsak realen x in jo zapišemo s predpisom

$$f(x) = kx + n.$$

Pri tem sta k in n realni konstantni. Graf linearne funkcije v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu je premica, po latinsko *linea*, po čemer je funkcija dobila pridevnik *linearna*. Evklid v svojih Elementih uporablja izraz εὐθεῖα γραμμή, kar pomeni *ravna črta*. Konstanta k določa strmino premice z enačbo $y = kx + n$, n pa začetno vrednost, ker je $f(0) = n$. Premica preseka os y v točki $(0, n)$. Če je $k = 0$, je funkcija konstanta, $f(x) = n$, njen graf pa je premica, vzporedna z osjo x. Za $k \neq 0$ premica preseka abscisno os v točki

$(-n/k, 0)$. Za $k > 0$ je linearna funkcija naraščajoča, za $k < 0$ pa padajoča, njen graf je v obeh primerih premica, ki oklepa z osjo x kot φ, za katerega je $\tan \varphi = k$.

Premica je z dvema točkama natančno določena. Razen premice, ki je vzporedna z osjo y, lahko vsem določimo enačbo oblike $y = kx + n$. Točki $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$, kjer je $x_1 \neq x_2$, linearno funkcijo in premico natančno določata. Njena enačba je

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

njen smerni koeficient pa kar preberemo:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Izrazu na desni strani rečemo *diferenčni kvocient*, ker je po obliki kvocient dveh razlik ali diferenc. Za splošno funkcijo ga zapišemo kot

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Za premico $y = f(x) = kx + n$ je diferenčni kvocient konstanten, enak je njenemu smernemu koeficientu k. Če namreč kakorkoli izberemo $x_1 \neq x_2$, dobimo $y_1 = f(x_1) = kx_1 + n, y_2 = f(x_2) = kx_2 + n$ in

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(kx_2 + n) - (ky_1 + n)}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = k.$$

Za kvadratno funkcijo $f(x) = x^2$ pa diferenčni kvocient ni konstanten:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2.$$

Da se razmeroma preprosto dokazati, da je edina funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ki ima konstanten diferenčni kvocient, linearna funkcija.

Do tu je vse lepo in prav. Linearno funkcijo se obravnava že na osnovni šoli, bolj poglobljeno pa na srednji. Nekaj težav pa nastane na višjih in visokih šolah, kjer pri matematiki obravnavajo vektorske prostore in linearne preslikave. Pri študiju algebrskih struktur nas vedno zanima, kako se le-te obnašajo pri preslikavah, ki ne podrejo strukture. Radi imamo preslikave, ki grupo preslikajo v grupo, kolobar v kolobar, obseg v obseg, torej tudi vektorski prostor v vektorski prostor. Pri tem ni nujno končni objekt enak začetnemu.

Če sta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$, potem je L *linearna preslikava* iz $\mathcal{U}$ v $\mathcal{V}$, če za poljubna vektorja x, y iz $\mathcal{U}$ in poljubna skalarja α, β iz $\mathbb{F}$ velja:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly.$$

Besede *funkcija, preslikava, transformacija* so v matematiki sinonimi, le da je ena bolj doma na enem področju, druga pa na drugem. Tradicionalno pri linearni preslikavi pišemo kar Lx namesto $L(x)$.

Beseda *polje*, ki smo jo uporabili, pomeni *komutativni obseg*. Težko jo je zamešati z besedo *polje* v vektorski analizi, kjer pomeni nekaj popolnoma drugega.

Pri tako definirani linearni preslikavi L je vedno $L0 = 0$. V posebnem primeru je lahko $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathbb{R}$ in $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Linearna preslikava $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ima po naši definiciji lastnost $L0 = 0$. To pa ni v soglasju z linearno funkcijo $f(x) = kx + n$, če je $n \neq 0$, ker velja $f(0) = n \neq 0$. V obeh smislih pa je funkcija $f(x) = kx$ linearna. Po sami definiciji namreč velja

$$f(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y) = \alpha kx + \beta ky = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Da se izognemu besednemu zapletu, funkcijo $f(x) = kx+n$, znano iz osnovne in srednje šole, raje imenujemo *afina funkcija*. Ta je linearna le za $n = 0$. Tudi v primeru splošnih vektorskih prostorov $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ imenujemo preslikavo $Ax = Lx + b$, kjer je b vektor iz $\mathcal{V}$ in L linearna preslikava, prav tako iz $\mathcal{U}$ v $\mathcal{V}$, *afina preslikava*. Ta je linearna le tedaj, ko je $b = 0$.

Beseda *afin* nima nobene zveze z besedo *fin* v smislu *lepo, nežno oblikovan, zelo droben, zelo tanek, boljši* ali kaj podobnega, ampak izhaja iz latinske besede *affinis*, kar pomeni *soroden, bližnji*. V sami latinščini je beseda *affinis* nastala z zlitjem predloga *ad*, kar pomeni *k, proti, do, ob, pri, na, blizu*, in samostalnika *finis*, kar pomeni *rob, meja*. Tudi beseda *afiniteta*, ki pomeni *sorodnost, podobnost*, izhaja iz *affinis*.

8 Bilinearna preslikava

Brez težav vpeljemo namesto realne funkcije $f(x) = kx + n$ tudi kompleksno funkcijo take oblike: $f(z) = kz + n$. V realnem primeru sta k in n realni števili, v drugem pa sta lahko kompleksni. Spet nastane težava, kako tako funkcijo poimenovati. Navadno ji rečemo kar *linearna*, čeprav bi bilo bolje iz istega razloga kot v realnem primeru uporabiti besedo *afina*.

V kompleksni analizi pa je pomembna funkcija, ki je kvocient dveh linearnih:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ ad - bc \neq 0.$$

Pogoj $ad - bc \neq 0$ privzamemo zato, da se izognemo konstantni funkciji, ki v kompleksnem primeru ni zanimiva. Taki funkciji navadno rečemo *linearna lomljena funkcija*. Ker je sestavljena iz dveh linearnih, ji pravimo tudi *bilinearna funkcija*. Tretje ime zanjo pa je *Möbiusova transformacija* ali *Möbiusova preslikava*, poimenovana po Augustu Ferdinandu Möbiusu (1790–1868). Möbius je morda bolj znan po svojem traku (slika 9), primeru ploskve, ki ima le eno stran. Če se namreč sprehodimo po njegovi srednjici, se po enem obhodu vrnemo v začetno točko z glavo na nasprotni strani. Möbiusova transformacija

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

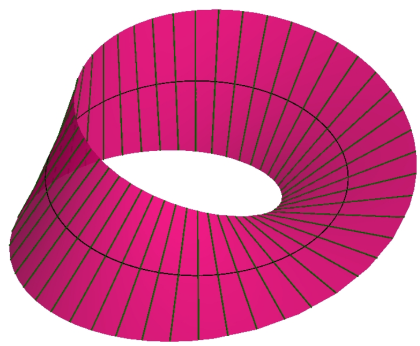
slika točke z ene razširjene kompleksne ravnine v točke w druge razširjene kompleksne ravnine. Razširjena kompleksna ravnina je običajna ravnina kompleksnih števil, ki jim dodamo še točko ∞. S tem poenostavimo marsikaj. Premice imamo lahko za krožnice, ki potekajo skozi točko ∞. Brez težav vzamemo, da je $1/0 = \infty$ v smislu, da preslikava $w = 1/z$, ki je Möbiusova, preslika točko $z = 0$ v točko $w = \infty$ in $z = \infty$ v točko $w = 0$.

Lepa lastnost Möbiusovih transformacij je ta, da zaporedna uporaba dveh da novo Möbiusovo transformacijo. Denimo, da sta to

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ g(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ ad - bc \neq 0,\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Potem je

$$f \circ g(z) = f(g(z)) = \frac{Az+B}{Cz+D},\ AD - BC \neq 0,$$



Slika 9: Möbiusov trak

pri čemer so

$$A = a\alpha + b\gamma,\ B = a\beta + b\delta,\ C = c\alpha + d\gamma,\ D = c\beta + d\delta.$$

Tudi inverz $f^{-1}(z)$ Möbiusove transformacije $f(z)$ je Möbiusova transformacija:

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

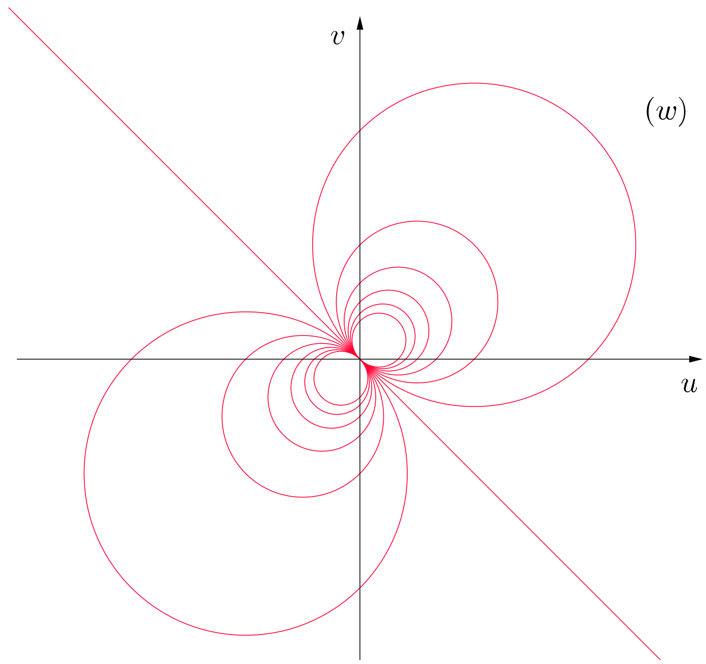
Zlahka se prepričamo, da velja $f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z$.

Lepa lastnost Möbiusove transformacije je v tem, da preslika premice iz ravnine (z) v krožnice ali premice v ravnini (w), prav tako pa preslika krožnice v krožnice ali premice. Primer kaže slika 10.

Beseda *bilinearna* je sestavljena iz besede *linearna*, ki nam je že domača. Predpona *bi* izhaja iz latinske besede *bini*, ki pomeni *po dva, po dvoje, dva, dvojica*. Izraz *bilinearna preslikava* ni najboljši, saj imamo še nešteto drugih bilinearnih preslikav v smislu, da so dvakrat linearne. Primer $f(u, v) = uv$. Zlahka pokažemo, da velja

$$f(\alpha x + \beta y, v) = \alpha f(x, v) + \beta f(y, v),\ f(u, \alpha x + \beta y) = \alpha f(u, x) + \beta f(u, y).$$

Tako se je treba sprijazniti s tem, da v matematiki na različnih področjih uporabljamo enake izraze v različnih pomenih.

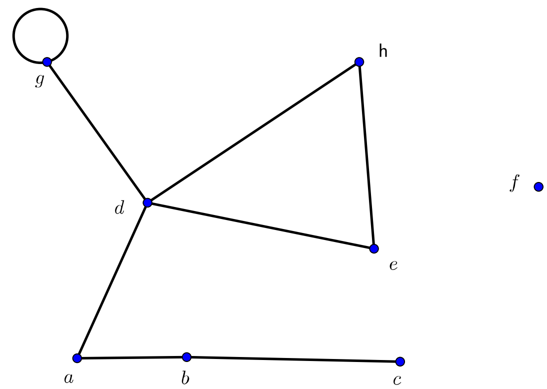


Slika 10: Slika vzporednih premic $(1+i)z + (1-i)\bar{z} = -2n$ s preslikavo $w = 1/z$

9 Grafi, vozlišča, povezave

Marsikdo pozna besedo *graf* iz teorije funkcij. Pravimo, da načrtamo *graf funkcije*. Običajno je graf realne funkcije ene realne spremenljivke krivulja, ki jo narišemo v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy. Graf realne funkcije dveh realnih spremenljivk je običajno ploskev v prostoru, ki jo bolj ali manj uspešno skušamo predstaviti v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$. Sama beseda *graf* izhaja iz grške besede γράφω, ki pomeni *včrtam, vrežem, vdolbem, slikam, rišem, vrežem v vosek ali kamen, pišem*. Iz te besede smo dobili še kup besed, na primer *grafiko*, *telegraf*, *poligraf*.

Naneslo pa je, da je graf G tudi množica točk v prostoru in povezav med temi točkami. Označimo ga z $G = (V, E)$, kjer je $V = V(G)$ množica točk in



Slika 11: Primer nepovezanega grafa s pentljo

$E = E(G)$ množica povezav grafa G. Oznaki V, E sta mednarodni. Oznaka V je začetna črka angleške besede *vertex*, ki pomeni *vrh, teme*, E pa začetna črka angleške besede *edge*, ki pomeni *rob, ostrina, greben*. Videti je, da z izborom besed tudi Angleži niso najbolj zadovoljni, saj imenujejo elemente v V tudi *points* ali pa *nodes*, elemente v E pa *arcs* ali *lines*. Teorija grafov se je v zadnjih časih strahovito hitro razvijala in neustreznost prej dobrih izrazov se je hitro izkristalizirala. Besedo *graf* v tem pomenu si je izmislil leta 1887 James Joseph Sylvester (1814–1897). Nemci točkam grafa pravijo *Knoten* ali *Ecken*, povezavam pa *Kanten* ali *Bögen*. Rusi uporabljajo besedo вершина za vozlišče in besedo рёбро za povezavo v grafu.

Če pogledamo graf na sliki 11, morda razumemo, zakaj z izrazi nismo popolnoma zadovoljni. Točka f je izolirana, nima nobene povezavo do kakšne druge točke. Težko bi ji rekli *vozlišče*, saj ne izraža dobro dejanskega stanja.

10 Pellova enačba

Algebrska enačba je vsaka enačba $F(x, y) = 0$, kjer je $F(x, y)$ polinom dveh spremenljivk s koeficienti iz nekega polja. Rešitev take algebrske enačbe je vsak urejeni par (x_0, y_0) elementov tega polja, za katerega velja $F(x_0, y_0) = 0$.

Pogosto pa nas zanimajo algebrske enačbe $F(x, y) = 0$, kjer je $F(x, y)$ polinom z racionalnimi koeficienti, rešitve pa iščemo med urejenimi pari (x_0, y_0) racionalnih števil. Ker ima izraz na levi strani enakosti $F(x_0, y_0) = 0$ končno mnogo členov, ulomkov, lahko le-te odpravimo z množenjem z njihovim najmanjšim skupnim imenovalcem. Enačbo $F(x, y) = 0$ s tem prevedemo na obliko $f(x, y) = 0$, kjer je $f(x, y)$ še vedno polinom dveh spremenljivk, toda s celimi koeficienti. Tedaj nas zanimajo rešitve (x_0, y_0) v celih številih, včasih celo v naravnih. Taki enačbi pravimo *diofantska enačba*, poimenovana po aleksandrijskem matematiku Diofantu (200-284), grško Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς. Analogno vpeljemo diofantske enačbe več kot dveh spremenljivk. Znani primeri so linearna diofantska enačba $ax + by = c$, kjer so a, b, c cela števila, enačba pitagorejskih trojic $x^2 + y^2 = z^2$ in Pellova enačba $x^2 - Dy^2 = 1$, kjer D ni kvadrat nobenega naravnega števila.

Pellovo enačbo je študiral že Pierre de Fermat (1601–1665), Leonhard Euler (1707–1783) pa jo je pripisal Johnu Pellu (1611–1685). Nekateri zato $x^2 - Dy^2 = 1$ imenujejo Fermat–Pellova enačba. William Brouncker (1620–1684) je odkril, kako se jo rešuje, Euler pa je malo pomešal oba Angleža in, ker je bil velik matematik, se je naziv *Pellova enačba* hitro prijela. John Wallis (1616–1703) jo je tudi že poznal.

V resnici so se za tako enačbo zanimali že v veliko prej. Vedeli so, da enačba $x^2 = 2y^2$ nima celoštevilskih rešitev, da pa jih enačba $x^2 = 2y^2 + 1$ ima. Ena rešitev je $(x, y) = (3, 2)$, ki nam omogoča najti vse druge. Trivialna rešitev $(x, y) = (1, 0)$ ni zanimiva, ker jo vsakdo vidi, poleg tega pa 0 dolgo niso priznali za število. Zanimajo nas samo rešitve v naravnih številih, kajti čim je (x, y) rešitev, so rešitve tudi $(-x, y), (-x, -y), (x, -y)$. Rešitve so, gledano geometrijsko, celoštevilske točke na hiperboli $x^2 - Dy^2 = 1$. Primer $D = 2$ kaže slika 12.

Do Pellove enačbe pridemo, če študiramo figurativna števila. Smiselno se je namreč vprašati, kdaj je figurativno število ene vrste tudi figurativno število druge vrste.

Kdaj je trikotniško število T_n enako kvadratnemu številu Q_m? Ker je $T_n = n(n+1)/2$ in $Q_m = m^2$, takoj dobimo diofantsko enačbo $n(n+1) = 2m^2$.

Pri tem sta m, n naravni števili. Prepišemo jo v obliko $4n^2+4n+1 = 8m^2+1$. Če vpeljemo $x = 2n+1$ in $y = 2m$, dobimo Pellovo enačbo $x^2 - 2y^2 = 1$. Če jo znamo rešiti, lahko odgovorimo na zastavljeno vprašanje. Vsaka rešitev (x, y) da naravni števili m, n, ker se izkaže, da je x liho, y pa sodo število. Najmanjša netrivialna rešitev je $(x_1, y_1) = (3, 2)$, kar nam da $n = 1, m = 1$. Prvo trikotniško število je res tudi kvadratno. Do novih rešitev pa pridemo z nastavkom $x_n + \sqrt{2}y_n = (x_1 + \sqrt{2}y_1)^n$ oziroma z rekurzijo $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n x_1 + 2y_n y_1, x_1 y_n + x_n y_1)$. Pri racionalnih α, β in naravnem eksponentu n je namreč $(\alpha + \beta\sqrt{2})^n = \gamma + \delta\sqrt{2}$, kjer sta γ, δ tudi racionalni števili. Hitro pa se vidi, da je pri racionalnih $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ enakost $\gamma + \delta\sqrt{2} = \gamma' + \delta'\sqrt{2}$ možna samo v primeru $\gamma = \gamma', \delta = \delta'$.

Naslednja rešitev Pellove enačbe $x^2 - 2y^2 = 1$ je zato $(x_2, y_2) = (9 + 2 \cdot 4, 2 \cdot 3 \cdot 2) = (17, 12)$, ki nam da $n = 8, m = 6$. Prav tako dobimo $(x_3, y_3) = (17 \cdot 3 + 2 \cdot 12 \cdot 2, 3 \cdot 12 + 17 \cdot 2) = (99, 70)$, ki da $n = 49, n = 35$. Zapišimo še rešitev $(x_4, y_4) = (577, 408)$, ki da $n = 288, m = 204$. Zaporedje rešitev lahko po mili volji nadaljujemo v nedogled. Vsaka rešitev pomaga najti kvadratno trikotniško število. Našli smo jih torej nekaj:

$$T_1 = Q_1,\ T_8 = Q_6,\ T_{49} = Q_{35},\ T_{288} = Q_{204}.$$

Ker je $x_n^2 - 2y_n^2 = (x_n - y_n\sqrt{2})(x_n + y_n\sqrt{2}) = (x_n - y_n\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n = 1$, velja še $x_n - y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^{-n} = (3 - 2\sqrt{2})^n$. Od prej pa imamo že $x_n + \sqrt{2}y_n = (x_1 + \sqrt{2}y_1)^n$. S seštevanjem in odštevanjem teh relacij dobimo eksplicitni formuli:

$$x_n = \frac{1}{2}\left((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n\right),\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n\right).$$

V teh dveh izrazih nastopa kvadrat srebrnega razmerja $\varrho^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Zato lahko zapišemo:

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\varrho^{2n} + \varrho^{-2n}\right),\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\varrho^{2n} - \varrho^{-2n}\right).$$

Vsaka Pellova enačba $x^2 - Dy^2 = 1$ ima najmanjšo netrivialno rešitev (x_1, y_1), preostale pa najdemo z nastavkom $x_n + \sqrt{D}y_n = (x_1 + \sqrt{D}y_1)^n$ oziroma z rekurzijo $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n x_1 + D y_n y_1, x_1 y_n + x_n y_1)$. Najmanjšo netrivialno rešitev (x_1, y_1) najdemo z metodo verižnih ulomkov, za katere je zrastla cela teorija. Zaresno in sistematično je Pellovo enačbo in verižne ulomke študiral šele Joseph-Louis de Lagrange (1736–1813).

Do Pellove enačbe z zelo velikim številom D privede znameniti *Arhimedov problem o govedu* – Πρόβλημα βοεικόν. Arhimed iz Sirakuz (287–212 pne.), Ἀρχιμήδης ὁ Συρακόσιος, eden največjih antičnih učenjakov, se je baje ta problem izmislil na podlagi besedila v Homerjevi Odiseji, kjer je govora o Helijevem govedu. Problem naj bi poslal v Aleksandrijo Eratostenu iz Kirene (273–194 pne.), Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναῖος, da bi se le-ta malo mučil z njim. Arhimed je to rad počel, ker so mu radi kradli ideje brez navedbe vira. Problem o govedu je številsko izredno zahteven, ker privede do Pellove enačbe

$$x^2 - 4 \cdot 609 \cdot 7766 \cdot 4657^2 y^2 = 1.$$

Z vpeljavo $z = 2 \cdot 4657y$ dobimo za spoznanje enostavnejšo, a še vedno spoštovanja vredno Pellovo enačbo

$$x^2 - 609 \cdot 7766 z^2 = x^2 - 4729494 z^2 = 1,$$

za rešitev pa pridejo v poštev le taki x in z, ki izpolnjujejo nekatere pogoje deljivosti. Najmanjša rešitev je

$$x_1 = 109931986732829734979866232821433543901088049,$$

$$z_1 = 50549485234315033074477819735540408986340.$$

Problem o govedu so rešili šele v novejšem obdobju.

Ljudje si pogosto domišljajo, da so do Pellovih enačb lahko prišli samo v Evropi. Izkazalo pa se je, da so jih poznali že Indijci. Leta 628 je Brahmagupta (598–668), ब्रह्मगुप्त, v svojem delu *Brahmasphuta siddhanta, brāhmasphuṭasiddhānta*, ब्राह्मस्पुटसिद्धान्त, podal rešitve Pellovih enačb za $D = 83$ in $D = 92$. Pokazal je, kako iz dveh rešitev Pellove enačbe dobimo novo rešitev. Izračunal je, da ima enačba $x^2 - 83y^2 = 1$ najmanjšo rešitev $(x_1, y_1) = (82, 9)$, enačba $x^2 - 92y^2 = 1$ pa $(x_1, y_1) = (1151, 120)$.

Brahmagupta je pisal v verzih, indijskih *šlokah*. Pomemben del njegovega ustvarjanja predstavlja odkritje, da nimamo le računskih operacij s števili, ampak tudi s čim drugim, kar dandanes spada v abstraktno algebro. Brahmagupta je dejansko vedel za multiplikativno strukturo rešitev diofantskih enačb $x^2 - Dy^2 = m$, kjer je m celo število in D ni kvadrat. Za $m = 1$ dobimo običajno Pellovo enačbo. Po Brahmagupti se imenuje naslednja *lema*:

Če je (p, q) rešitev enačbe $x^2 - Dy^2 = m$, (r, s) pa rešitev enačbe $x^2 - Dy^2 = n$, potem sta $(pr + Dqs, ps + qr)$ in $(pr - Dqs, ps - qr)$ rešitvi enačbe $x^2 - Dy^2 = mn$.

Danes, ko imamo izdelane oznake in pravila, tega ni težko dokazati. Privzemimo dana pogoja v lemi:

$$p^2 - Dq^2 = m,\ r^2 - Ds^2 = m.$$

Nato računamo

$$(pr \pm Dqs)^2 - D(ps \pm qr)^2 = p^2r^2 \pm 2pqrsD + D^2q^2s^2 - D(p^2s^2 \pm 2pqrs + q^2r^2),$$

$$(pr \pm Dqs)^2 - D(ps \pm qr)^2 = p^2r^2 + D^2q^2s^2 - Dp^2s^2 - Dq^2r^2,$$

$$(pr \pm Dqs)^2 - D(ps \pm qr)^2 = (p^2 - Dq^2)(r^2 - Ds^2) = mn.$$

S tem smo potrdili pravilnost leme.

Za $m = 1$ lema pomeni, da iz rešitev (p, q) in (r, s) Pellove enačbe $x^2 - Dy^2 = 1$ lahko sestavimo novi rešitvi $(pr \pm Dqs, ps \pm qr)$. Nič ni narobe, če vzamemo $p = r, q = s$. Tedaj sta rešitvi tudi $(p^2 + Dq^2, 2pq)$ in $(p^2 - Dq^2, 0) = (1, 0)$. Slednja ni nič drugega kot trivialna rešitev. S tem je pravzaprav v množici $\mathbb{P}_D$ rešitev Pellove enačbe $x^2 - Dy^2 = 1$ definirana operacija $\odot$ z relacijo:

$$(p, q) \odot (r, s) = (pr + Dqs, ps + qr).$$

Tega se ni težko zapomniti, kajti produkt

$$(p + q\sqrt{D})(r + s\sqrt{D}) = (pr + Dqs) + (ps + qr)\sqrt{D}$$

se obnaša enako. Če paru $(p,q) \in \mathbb{P}_D$ priredimo binom $p + q\sqrt{D}$, paru $(r,s) \in \mathbb{P}_D$ pa binom $r + s\sqrt{D}$, potem paru $(p,q) \odot (r,s) = (pr + Dqs, ps + qr) \in \mathbb{P}_D$ priredimo binom $(pr + Dqs) + (ps + qr)\sqrt{D}$. To prirejanje je povratno enolično, ker so p,q,r,s cela števila, D pa ni kvadrat. Očitno je $(p,q) \odot (1,0) = (1,0) \odot (p,q) = (p,q)$ za vsak par $(p,q) \in \mathbb{P}_D$. Seveda velja $(1,0) \in \mathbb{P}_D$. Ker velja

$$((p + q\sqrt{D})(r + s\sqrt{D}))(u + v\sqrt{D}) = (p + q\sqrt{D})((r + s\sqrt{D}))(u + v\sqrt{D})),$$

velja v $\mathbb{P}_D$ tudi asociativnostni zakon

$$((p,q) \odot (r,s)) \odot (u,v) = (p,q) \odot ((r,s) \odot (u,v)).$$

Nazadnje imamo še

$$(p + q\sqrt{D})(p - q\sqrt{D}) = p^2 - Dq^2 = 1,$$

kar pomeni, da v $\mathbb{P}_D$ velja

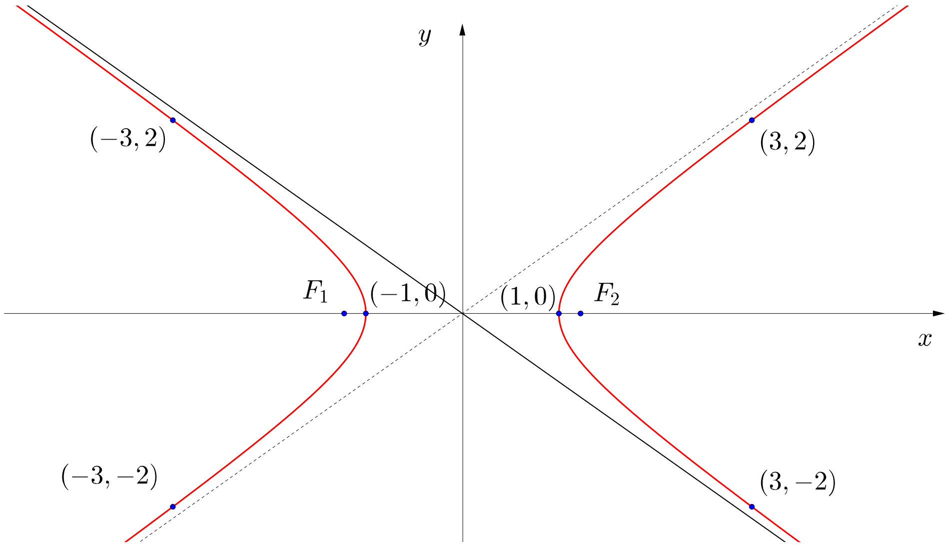
$$(p,q) \odot (p,-q) = (1,0),\ (p,q)^{-1\odot} = (p,-q).$$

To pomeni, da je $(\mathbb{P}_D, \odot)$ komutativna grupa.

Težava nastopi, ko je treba poiskati kakšno rešitev enačbe $x^2 - Dy^2 = m$. Brahmagupta se je ukvarjal s primeri $m = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Za $m = 1$ rešitev obstaja, celo netrivialna. Za enačbo $x^2 - 3y^2 = 2$ pa ne najdemo nobene celoštevilske rešitve. Zakaj ne? Preglejmo štiri možnosti.

1. Denimo, da obstaja celoštevilska rešitev enačbe $x^2 - 3y^2 = 2$ in da sta x in y sodi števili. Potem za celi števili ξ in η lahko zapišemo $x = 2\xi, y = 2\eta$. Veljati mora zveza $(2\xi)^2 - 3(2\eta)^2 = 2$. Po poenostavitvi dobimo $2\xi^2 - 6\eta^2 = 1$. Ker je leva stran dobljene enačbe sodo število, desna pa ne, pomeni, da dana enačba ni rešljiva v sodih številih.

2. Denimo, da obstaja celoštevilska rešitev enačbe $x^2 - 3y^2 = 2$ in da sta x in y lihi števili. Potem za celi števili ξ in η lahko zapišemo $x = 2\xi + 1, y = 2\eta + 1$. Veljati mora zveza $(2\xi + 1)^2 - 3(2\eta + 1)^2 = 2$.



Slika 12: Hiperbola $x^2 - 2y^2 = 1$ in nekaj celoštevilskih točk na njej

Po poenostavitvi dobimo $\xi(\xi + 1) - 3\eta(\eta + 1) = 1$. Ker je leva stran dobljene enačbe sodo število (produkt dveh zaporednih celih števil je sodo število), desna pa ne, pomeni, da dana enačba ni rešljiva v lihih številih.

3. Denimo, da obstaja celoštevilska rešitev enačbe $x^2 - 3y^2 = 2$ in da sta x in y števili različnih parnosti, recimo x sodo, y pa liho. Potem za celi števili ξ in η lahko zapišemo $x = 2\xi, y = 2\eta + 1$. Veljati mora zveza $(2\xi)^2 - 3(2\eta + 1)^2 = 2$. Po poenostavitvi dobimo $4\xi^2 - 12\eta(\eta + 1) = 5$. Ker je leva stran dobljene enačbe deljiva s 4, desna pa ne, pomeni, da dana enačba ni rešljiva pri začetni omejitvi.

4. Denimo, da obstaja celoštevilska rešitev enačbe $x^2 - 3y^2 = 2$ in da je x liho, y pa sodo število. Potem za celi števili ξ in η lahko zapišemo $x = 2\xi + 1, y = 2\eta$. Veljati mora zveza $(2\xi + 1)^2 - 3(2\eta)^2 = 2$. Po poenostavitvi dobimo $4\xi^2 + 4\xi - 12\eta^2 = 1$. Ker je leva stran dobljene enačbe deljiva s 4, desna pa ne, pomeni, da dana enačba ni rešljiva pri začetni omejitvi.

Enačba $x^2 - 3y^2 = 2$ torej nima nobene celoštevilske rešitve.

Okoli leta 1150 je Bhaskara Mlajši (1114–1185), *Bhaskara učitelj – bhāskarācārya* – भास्कराचार्य) reševal enačbo $x^2 - 61y^2 = 1$ in našel najmanjšo rešitev $(x_1, y_1) = (1766319049, 226153980)$. To je zapisal v svojem delu *Vidžaganita* ali tudi *Bidžaganita*, *vījagaṇita* ali *bījagaṇita*, वीजगणित ali बीजगणित.

11 Liho, sodo

Najbolj naravna delitev celih števil je delitev na *soda* in *liha* števila. Celo število je sodo, če je deljivo z 2, in liho, če ni deljivo z 2. Zato lahko zapišemo množico celih števil $\mathbb{Z}$ kot unijo sodih in lihih števil:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\} \cup \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots\}.$$

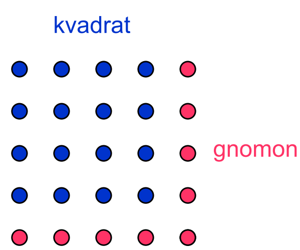
Soda števila mnogi imenujejo *parna*, liha pa *neparna*. Pravimo tudi, da cela števila razdelimo glede na njihovo *parnost*. Pogosto pravimo, da je premica $y = x$ simetrala lihih kvadrantov (prvega in tretjega), premica $y = -x$ pa simetrala sodih kvadrantov (drugega in četrtega). Poznamo *sode* in *lihe funkcije*. Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je soda, če za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(-x) = f(x)$, in liha, če za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $f(-x) = -f(x)$. Seveda obstajajo funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ki niso niti sode niti lihe. Pač pa lahko vsako tako funkcijo zapišemo kot vsoto sode in lihe funkcije:

$$f(x) = f_s(x) + f_l(x),\ f_s(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},\ f_l(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Vsako sodo število lahko zapišemo kot $2k$, liho pa kot $2k+1$. V obeh primerih je k celo število. Za sode eksponente n velja enakost $(-1)^n = 1$, za lihe pa $(-1)^n = -1$. V kombinatoriki govorimo o *sodih* in *lihih permutacijah*. Če je n naravno število, večje od 1, lahko števila $1, 2, \ldots, n$ med seboj premešamo, prerazporedimo, permutiramo. Pri tem nobenega ne odvzamemo, nobenega ne dodamo, nobenega ne ponovimo. Permutacijo prikažemo s tabelico:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_n \end{pmatrix}.$$

V spodnji vrstici so ista števila kot v zgornji, le med seboj pomešana. Če dve števili v spodnji vrstici med seboj zamenjamo, dobimo novo permutacijo. Pravimo, da smo opravili *transpozicijo*. Zanima nas, koliko transpozicij je treba opraviti, da spodnjo vrstico spravimo v naravni vrstni red, kakršen je v zgornji vrstici. Izkaže se, da je število potrebnih transpozicij sodo ali liho. Nič ne pomaga: če jih je sodo (liho) mnogo, jih bo sodo (liho) mnogo, pa če se še tako trudimo, da bi jih bilo liho (sodo). Vseh permutacij je $n!$. Polovico teh lahko spravimo v naravni vrstni red s sodim številom transpozicij, polovico pa z lihim. Prvim pravimo *sode permutacije*, drugim pa *lihe permutacije*.



Slika 13: Gnomon in kvadrat

Mi smo cela števila razdelili na soda in liha. Nekoč, ko še niso poznali negativnih celih števil in ničle, so na soda in liha delili samo naravna števila. Spoznali so, da se vsako sodo število lahko razdeli na dva enaka dela, pri lihih pa vedno ostane 1. Pitagorejci, ki so nekaj dali na števila, so temu pripisovali poseben pomen. Vedeli so že, da je vsota dveh sodih ali dveh lihih števil sodo število, vsota sodega in lihega števila pa liho število. Prav tako so jim dobro šlo od rok množenje: produkt dveh števil je lih samo v primeru, ko sta oba faktorja liha. Liha števila $3, 5, 7, \ldots$ so se jim zdela imenitna, ker prišteta kvadratom $1, 4, 9, \ldots$ dajo spet kvadrate: $4, 9, 16, \ldots$ Nam se to zdi otročje, saj je $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. Spoznali so tudi, da so vsa praštevila razen 2 liha. *Praštevilo*, πρῶτος ἀριθμός, je naravno število, ki ima natančno 2 delitelja: sebe in 1. Praštevila vpelje Evklid v sedmi knjigi Elementov. Prav tako tu vpelje izraza *sodo število*, ἄρτιος ἀριθμός, in *liho število*, περισσός ἀριθμός. Sicer ἄρτιος ne pomeni le *sod*, ampak tudi *pristojen, primeren,* *pripraven, pripravljen, voljen.* Beseda περισσός, v atiškem narečju περιττός, ne pomeni samo *lih*, ampak še *čezmeren, preobilen, prevelik, izreden, nenavaden, poseben, zelo učen, odličen, imeniten, važen, pomemben, pretiran, odvečen, preostali.*

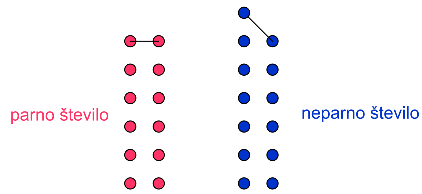
Grki so poznali sončno uro, gnomon, γνώμων, v obliki črke "L" ali "⅃". Sonce je metalo senco pokončnega dela gnomona na njegov vodoravni del in po dolžini sence so lahko merili dnevni čas. Liho število predmetov, denimo kroglic, so razvrstili v obliki črke "L" ali "⅃". Tej razporedbi so pitagorejci tudi rekli *gnomon.* Gnomon, združen s kroglicami, razporejenih v kvadrat, pa da nov kvadrat, ki ima v osnovnici eno kroglico več kot prvotni kvadrat.

Veliko jezikov izvaja izraze za liha in soda števila na podlagi besede *par*, za kar se v slovenščini raje vidi in sliši beseda *dvojica.* Dvojica ali par je, enostavno povedano, množica dveh reči. Lahko je to plesni par, kar običajno pomeni ženska in moški. Tudi Uršika zala in Povodni mož sta bila kratek čas plesni par, kakor pove France Prešeren svoji baladi:

Podal ji mladenič prelepi je rôko,
in urno ta dvá sta po pódu zletela,
ko de bi lahké peretnice imela,
bila bi brez trupla okrog se vrtela,
ne vidi se, kdaj de pod noga udar',
plesala sta, ko bi ju nosil vihar.

Sodo, *parno* število elementov, lahko razdelimo po dva in dva v pare, lihega števila pa ne moremo, zato je *neparno.* Slovaki govorijo *párne a nepárne čísla*, Hrvati *parni i neparni brojevi*, Srbi парни и непарни бројеви, Francozi *les nombres pairs et impairs*, Italijani *numeri pari e dispari*, Rusi pa imajo nekaj svojega: чётные и нечётные числа. Naši besedi *lih* sta blizu ruski лихо v pomenu *zlo, hudo* in лихой v pomenu *zlovešč, zloben, drzen, pogumen.*

Če naložimo sodo število enakih predmetov v dva stolpca (slika 14), se nam zadnja dva končata ravno. Morda zato Angleži uporabljajo za sodo število izraz *even number*, Nemci pa *gerade Zahl.* Besedi *even* in *gerade* pomenita *raven.* Pri lihem številu pa en predmet zgoraj ostane, stolpca se



Slika 14: Sodo in liho število

ne končata ravno. Morda ravno zato Angleži uporabljajo za liho število izraz *odd number*, Nemci pa *ungerade Zahl*. Besedi *odd* in *ungerade* pomenita *neraven*.

Pravijo, da so v Istri nekoč zamenjali pomen besed *sod* in *lih*, ker v narečju za *raven* uporabljajo tudi besedo *glih* ali samo *lih*, gar pride iz nemške *gleich*.

Zanimivo pa je, da Čehi uporabljajo podobna izraza kot Slovenci, *sudá a lichá čísla*, to se pravi *soda in liha števila*. Za besedo *sod* ne najdemo posebne razlage razen da to pomeni biti deljiv z dve ali sestavljen iz dveh enakih delov. Besedo *lih* pozna stara cerkvena slovanščina v pomenu *čezmeren, odvečen, pomanjkljiv*. V češčini pomeni *lichost* poleg *lihost* še bolj čudne reči: *neenakost, hinavščina*. Prav tako pridevnik *lichy*, ki pomeni *lih, hinavski, potvorjen, neresničen, izmišljen, jalov, prazen, neosnovan, domneven*.

Pravijo tudi, da mora biti v šopku, ki ga podarimo osebi ob posebni priložnosti, liho število cvetov. Morda ima ta navada korenine v starem Rimu. Drugi rimski kralj Numa Pompilius (753–673 pne.), ki ga v *Vzporednih življenjepisih*, Βίοι παράλληλοι, opisuje Plutarh (48–127), Μέστριος Πλούταρχος, je izdal pravilo, da je treba nebeškim bogovom darovati liho, bogovom podzemlja pa sodo število žrtvenih živali.

12 L'Hôpitalovo pravilo

Niccolò Fontana Tartaglia (1499–1557) je znal rešiti kubično enačbo $x^3+ax = b$ pri pozitivnih koeficientih a, b in to zaupal Gerolamu Cardanu (1501–1576), ki je postopek nato objavil leta 1545 v delu *Ars magna de regulis algebraicis*, čeprav se nista tako dogovorila. Je pa Cardano znal rešiti vse primere kubične enačbe. Med prvimi je delal s kompleksnimi števili. Scipione del Ferro (1465–1526) se sicer šteje za prvega, ki je ugnal omenjeno kubično enačbo, rešitev pa je prišla v roke Tartagli. Del Ferro in Tartaglia rezultata nista nikoli objavila, Cardano pa ga je in s tem požel vso slavo. Danes poznamo *Cardanove formule* za korene kubične enačbe $x^3 + px + q = 0$. Na to obliko lahko prevedemo z vpeljavo nove neznanke vsako kubično enačbo. Cardanove formule vsebujejo kvadratne in kubične korene.

Nekaj podobnega se je zgodilo v matematični analizi. Guillaume François Antoine markiz de L'Hôpital (1661–1704) (sam L'Hôpital se je sicer podpisoval kot L'Hospital, kasnejši francoski pravopis pa je uvedel pisavo L'Hôpital) je leta 1696 v delu *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, prvem učbeniku matematične analize, objavil danes vsem matematikom znano *L'Hôpitalovo pravilo*:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pri tem mora veljati: funkcija $f(x)$ je odvedljiva v okolici točke a, $g'(x) \neq 0$ v tej okolici, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ in limita na desni strani zgornje relacije obstaja. Pripomnimo, da je to le ena varianta tega pravila, ki ga je treba vedno previdno uporabljati. Pravimo, da z njim obravnavamo nedoločenosti tipa $0/0$. Podobno pravilo uporabljamo tudi za nedoločenost tipa ∞/∞. Nedoločenosti tipa $\infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$ pa skušamo prevesti na osnovna dva tipa $0/0$ in ∞/∞. L'Hôpitalovo pravilo je priljubljeno, ko je treba na hitro izračunati kakšno limito, vendar ne gre vselej tako gladko, kot je videti na prvi pogled. Še najbolje je malo kombinirati to pravilo s klasičnimi prijemi pri računanju limit.

Johann Bernoulli (1667–1748) je povsod širil matematično analizo, ki je postajala takrat novo matematično področje. Naneslo je tako, da je leta 1691 srečal v Parizu perspektivnega matematika L'Hôpitala, ki je poslušal njegova predavanja. Kasneje sta si celo dopisovala. V *Analyse*, ki je zgledno in metodično napisan učbenik, se je L'Hôpital sicer zahvalil Leibnizu in Bernoulliju za ideje, vendar je bil Bernoulli zelo hud, ko je odkril v delu veliko strani, ki so bile del njegovih predavanj.

Vsekakor bi bilo bolj prav, če bi zgornje pravilo za računanje limit imenovali *Bernoulli–L'Hôpitalovo pravilo*. Rusi mu pošteno pravijo tudi правило Бернулли–Лопиталя.

Beseda *limita* je latinskega izvora. V latinščini je prvotno pomenila *limes*, rodilnik *limitis*, pot med dvema zemljiščema, potem je spremenila pomen v *državno mejo*, tudi v *utrjeno zunanjo mejo Rimskega imperija*. Znan je limes med Donavo in Renom, ki so ga Rimljani zgradili proti Germanom. Nemci rečejo limiti *Grenzwert*, kar dobesedno pomeni *mejna vrednost*, Rusi pa предел, Srbi in Makedonci se zgledujejo po Nemcih in limiti rečejo гранична вредност.

13 Fibonacci

Kdo ne pozna Fibonaccijevega zaporedja $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, to se pravi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots,$$

ki se prične z 0 in 1, nato pa je vsak nadaljni člen vsota prejšnjih dveh:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Fibonacci je pravilneje *Leonardo iz Pize*. *Piza*, italijansko *Pisa*, leži ob izlivu reke Arno v Ligursko morje. Predvsem je znana po poševnem stolpu, ki so ga začeli graditi v času Leonardovega otroštva. Precej podatkov o njegovem življenju in delu ni zanesljivih. Niti ni znano, kdaj točno je živel, kje se je rodil in kje umrl. Navadno navajajo, da je Fibonacci, italijanski matematik, rojen okoli leta 1170 v Pizi, umrl pa okoli leta 1250 tudi v Pizi. Njegovo najpomembnejše delo je *Liber abbaci* iz leta 1202. Leta 1228 je to knjigo, dopolnjeno in popravljeno, še enkrat objavil. Knjiga je napisana v latinščini. V resnici njen naslov ni nikjer razviden, sam Leonardo besedo *abbaci* zapiše le nekajkrat. V Leonardovi dobi še ni bilo tiska in zato so knjige prepisovali. Ohranilo se je le nekaj bolj ali manj dobro ohranjenih izvodov *Liber abbaci*.

Beseda *liber* pomeni *knjiga*, beseda *abbaci* pa je rodilnik besede *abbacus*. Misleč, da je Leonardo naredil napako, ko je zapisal *abbaci*, in da bi moralo biti *abaci*, kar je rodilnik besede *abacus*, so začeli pisati vse vprek *Liber abaci*, kar bi pomenilo *Knjiga abaka*. Vsebina knjige pa je daleč od tega, da bi se iz nje učili računati na abakus. V Leonardovem času še ni bil izoblikovan italijanski knjižni jezik, latinščina je bila tudi že pomešana z nelatinskimi izrazi, tako da se ne smemo čuditi, če je kdo kakšno besedo zapisal malo po svoje. Morda so celo razlikovali med besedama *abacus* in *abbacus*. Popolnoma možno je, da je slednja pomenila veščino računanja na splošno, prva pa napravo, ki je pomagala računati.

V času Leonardovega življenja so cvetela italijanska obmorska mesta Benetke, Genova, Piza in Amalfi. Razpredla so močno trgovinsko mrežo po celotnem Sredozemlju in se tudi spopadala za prevlado. Bil je to tudi čas križarskih vojn (1095–1291) pa tudi investiturni boj med papeži in Svetim rimskim cesarstvom še ni bil končan. Leonardov oče Guglielmo je bil mestni pisar in trgovec, ki je postal pizanski trgovinski zastopnik v mestu Bugia (v italijanščini), Bougie (v francoščini), بجاية, Bidžaja (v arabščini) v današnji Alžiriji. Na potovanja v Bizanc, Sirijo, Egipt in Provanso je jemal tudi Leonarda, ki je spotoma spoznal arabsko matematiko. Okoli leta 1190 je vzel Leonarda s sabo v Bugio, kjer se je sistematično dobro naučil računati z indijsko–arabskimi številkami in spoznal veliko prednost le-teh pred rimskimi. Ko se je vrnil v Pizo, je brez težav napisal *Liber abbaci* in s tem veliko pripomogel k razvoju evropske matematike. Napisal je še druge knjige: *Practica geometriae* (1220/21), *Flos* (1225), *Liber quadratorum* (1225). Iz vseh se vidi, da je dobro obvladal tudi Evklidova in Diofantova dela.

V čem je pravzaprav odlika knjige *Liber abbaci*? Že na prvi strani uvede indijsko–arabske števke, nato pokaže njihovo praktičnost za računanje, pokaže veliko primerov, na primer računanje obresti in preračunavanje med valutami, rešuje enačbe, dela z ulomki, z zaporedji, popolnimi števili, koreni, približki in s še marsičem drugim. *Liber abbaci* vsebuje tudi znameniti problem kuncev, kar danes obravnavamo pri Fibonaccijevem zaporedju.

Ime *Fibonacci* naj bi po neki razlagi nastalo iz besedne zveze *Filius*

Bonaccii, kar pomeni *sin Bonaccia*. Sebe Fibonacci res na začetku knjige *Liber abbaci* imenuje *Filius Bonaccii*, pa tudi *Leonardo Bigollo*, kar pomeni v toskanskem narečju *Leonardo Popotnik (Potepuh, Klatež, Vagabund)*. Guglielmo Libri Carucci dalla Sommaja (1803–1869) je verjetno najbolj kriv, da dandanes največ uporabljamo ime *Fibonacci* in kombinacijo *Leonardo Fibonacci* namesto *Leonardo iz Pize*. Prav on naj bi leta 1838 prvi uporabljal tako ime. Matematični zgodovinar Baldassarre Boncompagni Ludovisi (1821–1894) je leta 1852 priskrbel prvo moderno izdajo *Liber abbaci*. Pripomnimo, da je prva tiskana matematična knjiga izšla leta 1478 v Trevisu. Napisana je v beneškem narečju, avtor pa je neznan. Naslova nima točno določenega, včasih je to *Arte dell'abbaco*, včasih pa *Aritmetica di Treviso*. Namenjena je praktični uporabi, zlasti v trgovini, ki se je v tistem obdobju zelo razmahnila. Podobno kot Leonardov *Liber abbaci* da veliko na računanje z indijsko–arabskimi številkami.

Nikomur pa ni uspelo dokazati, da je Leonarda v času njegovega življenja kdorkoli klical *Fibonacci*. Tudi izraz *Fibonaccijevo zaporedje* je novejšega datuma. François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) je tisti, ki je zaporedje $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ poimenoval po Fibonacciju. Po Lucasu se imenuje zaporedje $(L_n)_{n=0}^{\infty}$, ki je definirano podobno kot Fibonaccijevo:

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Začne se takole: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$ Med obema zaporedjema obstajajo zanimive analogije in povezave.

Indijski strokovnjak za metriko v poeziji *Pingala, piṅgala*, पिङ्गल, ki se je tudi ukvarjal z matematiko, naj bi v 3. stoletju pred našim štetjem že poznal binomske koeficiente, Pascalov številski trikotnik in številsko zaporedje, ki je pravzaprav Fibonaccijevo.

Fibonacci se je izkazal tudi kot tekmovalec leta 1225, ko se je v Pizi mudil cesar Friedrich II. von Hohenstaufen (1194–1250). Znana je naloga:

Poišči take ulomke a, b, c, za katere velja

$$a^2 + 5 = b^2, \quad a^2 - 5 = c^2.$$

Fibonacci je baje takoj našel rešitev:

$$a = \frac{41}{12}, \quad b = \frac{49}{12}, \quad c = \frac{31}{12}.$$

Obstaja matematična revija, poimenovana po Fibonacciju: *The Fibonacci Quarterly*, ki izhaja od leta 1963. Njena ustanovitelja sta bila Verner Emil Hoggatt Mlajši (1921–1980) in Alfred Brousseau (1907–1988).

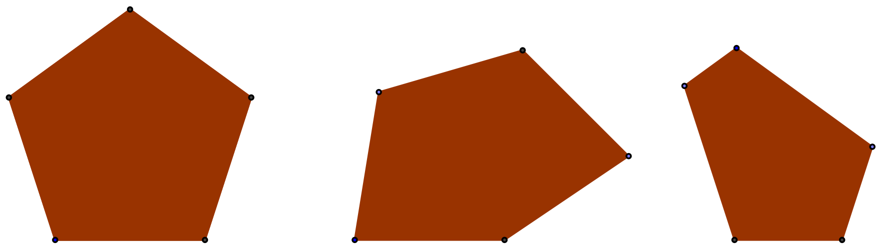
14 Pravilni večkotniki in krožna konstanta

Evklid v Elementih ne uporablja izraza *pravilni večkotnik*. V slovenščini se uporablja tudi izraz *pravilni mnogokotnik*. Evklid namesto *pravilni* v tem primeru uporablja besedno zvezo *enakostranični in enakokotni*, v grščini ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον.

V slovenščini smo pred nekaj desetletji uporabljali izraze *peterokotnik, šesterokotnik,* ..., ki smo jih zamenjali z *petkotnik, šestkotnik,* ...

Kaj pa za najpreprostejša pravilna večkotnika, *enakostranični trikotnik* in *kvadrat*? Izraz *enakostranični trikotnik* je dobeseden prevod Evklidovega τριγώνον ἰσόπλευρόν, le da v grščini pridevnik stoji za samostalnikom. Evklid za kvadrat uporablja besedo τετράγωνον. Pri enakostraničnem trikotniku ni potrebno dodajati še pridevnika *enakokoten*, kajti vsak enakokoten trikotnik je enakostraničen in obratno. Ni pa vsak enakostranični štirikotnik, petkotnik, ... tudi enakokoten in prav tako vsak enakokoten štirikotnik, petkotnik, ... ni enakostraničen. Romb je enakostraničen štirikotnik, ki pa je enakokoten le, če je kvadrat. Pravokotnik je enakokoten štirikotnik, ni pa enakostraničen, razen če je kvadrat.

Vsi pravilni večkotniki niso konstruktibilni, kar pomeni, da se jih ne da konstruirati samo *s šestilom* in *neoznačenim ravnilom*. Pridevnik *neoznačen* je pomemben, a ga marsikdo izpušča. Kriterij, kdaj je pravilni večkotnik konstruktibilen, operira s *Fermatovimi praštevili*. Ker nihče še ne ve, ali je teh končno ali neskončno mnogo, tudi ne moremo vedeti, koliko pravilnih večkotnikov z lihim številom stranic je konstruktibilnih. S tem problemom se zato matematiki še vedno intenzivno ukvarjajo.



Slika 15: Pravilni, enakostranični in enakokotni petkotnik

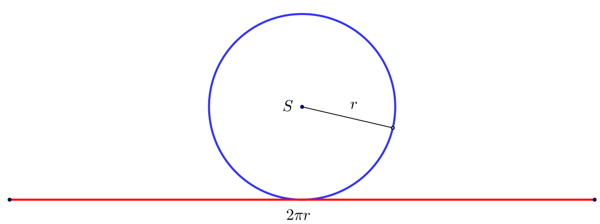
Krožna konstanta ali *krožno število* ni nič drugega kot razmerje med obsegom in premerom kroga. Označujemo ga s π. Dolga stoletja se resni in amaterski matematiki ukvarjajo z njim. Najprej se je izkazalo, da je π iracionalno število, kar pomeni, da ga ni mogoče zapisati v obliki ulomka dveh naravnih števil. Nato je prišlo na dan, da π ni algebrsko število, to se pravi, da π ni ničla nobenega polinoma s celimi koeficienti. Posledično s šestilom in neoznačenim ravnilom ni mogoče načrtati daljice, ki bi imela za dolžino obseg danega kroga, pa tudi ne kvadrata, ki bi imel enako ploščino kot dani krog. Pravimo, da je problem *kvadrature kroga* nerešljiv.

Kljub temu pa število π že dolga leta skušajo izračunati na čim več decimalk natančno. Arhimed je π resno računal z metodo krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov. Njegovo metodo so uporabljali približno poldrugo tisočletje. Isaac Newton (1643–1727) je prvi poskusil novo metodo, metodo številskih vrst, dosegel čedno število pravilnih decimalk števila π, a je imel dovolj drugega dela kot računanje tega čudnega števila.

Na pomoč so priskočile trigonometrične funkcije in njihovi adicijski izreki s svojimi posledicami, s katerimi se da doseči precej hitro lepe rezultate. S formulo

$$\pi = 4\left(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right)$$

je John Machin (1680–1751), ki je oba njena člena razvil v vrsti in nato seštel dovolj členov, prvi izračunal število π na prvih 100 pravilnih decimalk. Pri tem je očitno potekal ves račun samo z racionalnimi števili, ki jih je bilo seveda treba zapisati na primerno število decimalk. William Jones (1675–1749) je v nekem prispevku leta 1706 natančno opisal Machinov uspeh z vsemi stotimi decimalkami števila π, avtorja verjetno tako zelo pohvalil glede natančnosti, da mu je bilo kar nerodno, in predlagal, da se krožno konstanto označi s π, ker je to prva črka grške besede περιφέρεια, kar pomeni obod, krog. To besedo uporablja tudi Evklid v svojih Elementih, kjer o kakšnem perimetru, grško περίμετρος, kar pomeni obseg, še ni govora. Kasneje je Leonhard Euler kot eden največjih matematikov še bolj uveljavil oznako π, ki jo uporabljamo še danes. Bili pa so tudi poskusi nekih čudakov (čudaki so okras sveta), da bi namesto razmerja obsega in premera kroga vpeljali za krožno konstanto razmerje med obsegom in polmerom kroga, češ da je to bolj naravno. Ta konstanta bi bila potemtakem enaka 2π. Res pa je Al Kaši (1370–1429, perzijsko Ghijas-ud-din Džamšid Kašani, غياث الدين جمشيد کاشانی) svoj čas izračunal 2π na več kot ducat pravilnih prvih decimalk po arhimedski metodi.



Slika 16: Rektifikacija krožnice

V Eulerjevem času je neznani avtor izračunal π na pravilnih prvih 152 decimalk. Nekateri so jih, brez navedbe avtorja, morda samo z opombo, da je tako zapisano v nekem rokopisu v Oxfordu, prepisovali in objavljali. Šele leta 1854 je bilo objavljenih 200 pravilnih prvih decimalk števila π, s čimer so bile oxfordske potrjene kot točne, pa tudi Vegovih 136, objavljenih v *Veliki zakladnici logaritmov* (1794). Zagoričan Jurij Vega (1754–1802) je sicer število π računal na veliko decimalk že prej, a se je žal nekajkrat zmotil na zadnjih mestih, kljub temu pa je prvih 126 decimalk izračunal pravilno že leta 1789 in svoj rezultat poslal akademiji v Sankt Petersburg.

Galoisova teorija enačb je potrdila, da je problem kvadrature kroga nerešljiv samo s šestilom in neoznačenim ravnilom. Prav tako je nerešljiv *problem rektifikacije krožnice*, ki se ukvarja s tem, kako z omenjenima orodjema konstruirati daljico, ki je dolga toliko, kolikor meri obseg kroga (slika 16). Pač pa obstajajo približne metode. Eno takih je odkril Adam Adamandy Kochański (1631–1700). Imenuje se *konstrukcija Kohanskega*. Te nismo navedli zato, da bi jo preverili, ampak zaradi poimenovanj po ljudeh, ki imajo priimke na -ski, sky, -cki, -cky, -čki. Take sklanjamo po zgledu *Koseski, Koseskega*. Prav čudno se sliši, če bi rekli *Kohanskijeva konstrukcija*, kar se dogaja. Nekateri uporabljajo obliko *Koračnica Radetzkija* ali *Radetzkijeva koračnica*? Ti se požvižgajo na naš pravopis. Prav je *Koračnica Radetzkega*. Saj tudi ne pravimo *romani Dostojevskija, balet Čajkovskija, geometrija Lobačevskija*, ampak *romani Dostojevskega, balet Čajkovskega, geometrija Lobačevskega*. V Ljubljani imamo *Komenskega ulico, Hradeckega most*. Avtor tega besedila je bil doktorand profesorja *Tomaža Pisanskega*. Vse skupaj pa pove, da je treba pri matematičnih zadevah, kar *konstrukcija Kohanskega* zagotovo je, paziti tudi na pravopis in slovnico.

Za konec

Upajmo, da smo si ob študiju matematičnega izrazja ustvarili vtis, da tudi v matematiki ni vse za vse čase v naprej zakoličeno. Tako kot se spreminja naravni jezik, se tudi matematični. Matematika mora samo paziti, da ne prihaja do nesporazumov, ko uporablja neki izraz. Nič hudega ni, če en in isti izraz uporablja za različne reči, pomembno pa je, da v okviru neke teorije izraza ne spreminja. Izraz *polje* pomeni v algebri komutativni obseg v pomenu matematične strukture, v vektorski analizi pa *polje* pomeni nekaj drugega. Do zmešnjave ne more priti, ker v vektorski analizi navadno govorimo o *skalarnem* oziroma *vektorskem polju*.

Obstajajo etimološki slovarji matematičnega izrazja, na primer [6]. Mi ga še nimamo. Ne bi bilo odveč, če bi se ga nekdo lotil. Tudi temeljit študij razvoja slovenskega matematičnega izrazoslovja ne bil odveč.

15 Večjezični matematični slovarček

slovensko	angleško	nemško	francosko	rusko
pozitiven	positive	positiv	positif	положительный
negativen	negative	negativ	négatif	отрицательный
število	number	Zahl	nombre	число
trikotnik	triangle	Dreieck	triangle	треугольник
kvadrat	square	Quadrat	carré	квадрат
zvezen	continuous	stetig	continue	непрерывный
zaporedje	sequence	Folge	suite	последовательность
vrsta	series	Reihe	série	ряд
kot	angle	Winkel	angle	угол
izrek	theorem	Satz	théorème	теорема
krivulja	curve	Kurve	courbe	кривая
ploskev	surface	Fläche	surface	поверхность
odvod	derivative	Ableitung	dérivée	производная
tangenta	tangent	Tangente	tangente	касательная
kocka	cube	Würfel	cube	куб
krogla	ball	Kugel	boule	шар
stožec	cone	Kegel	cône	конус
kvader	cuboid	Quader	pavé droit	прямоугольный параллелепипед
točka	point	Punkt	point	точка
premica	line	Gerade	droite	прямая
ravnina	plane	Ebene	plan	плоскость
dokaz	proof	Beweis	démonstration	доказательство
zmnožek	product	Produkt	produit	произведение
vsota	sum	Summe	somme	сумма
razlika	difference	Differenz	différence	разность
števec	numerator	Zähler	numérateur	числитель
imenovalec	denominator	Nenner	dénominateur	знаменатель
ulomek	fraction	Bruch	fraction	дробь
stopnja	degree	Grad	degré	цтепень

slovensko	angleško	nemško	francosko	rusko
množica	set	Menge	ensemble	множество
verižnica	catenary	Kettenlinie	chaînette	цепная линия
enačba	equation	Gleichung	équation	уравнение
koren	root	Wurzel	racine	корень
determinanta	determinant	Determinante	déterminant	определитель
ogrinjača	envelope	Einhüllende	enveloppe	огибающая
ploščina	area	Flächeninhalt	aire	площадь
prostornina	volume	Volumen	volume	объём
dolžina	length	Länge	longueur	длина
podoben	similar	ähnlich	semblable	подобный
skladen	congruent	kongruent	congruent	конгруэнтный
preslikava	mapping	Abbildung	application	отображение
prostor	space	Raum	espace	пространство
razvejišče	branch point	Verzweigungs-punkt	point de branchement	точка ветвления
prevoj	inflection point	Wendepunkt	point d'inflexion	точка перегиба
rešitev	solution	Lösung	solution	решение
sedlo	saddle point	Sattelpunkt	point-selle	седловая точка
sled	trace	Spur	trace	след
spirale	spiral	Spirale	spirale	спираль
os	axis	Achse	axe	ось
valj	cylinder	Zylinder	cylindre	цилиндр
verjetnost	probability	Wahrscheinlichkeit	probabilité	вероятность
vijačnica	helix	Helix	hélice	винтовая линия
vozel	knot	Knoten	nœud	узел
gorišče	focus	Brennpunkt	foyer	фокус
središče	centre	Mittelpunkt	centre	центр
krožnica	circle	Kreis	cercle	окружность
domneva	conjecture	Vermutung	conjecture	гипотеза
enakostraničen	equilateral	gleichseitig	équilatéral	равносторонний
enakokrak	isosceles	gleichschenklig	isocèle	равнобедренный

Literatura

[1] K. Devlin, *The man of numbers: Fibonacci's arithmetic revolution*, Bloomsbury Publishing, London in drugje, 2011.

[2] E. Hairer, G. Wanner, *Analysis by its history*, Springer, New York, 2008.

[3] U. C. Merzbach, C. B. Boyer, *A history of mathematics*, Third edition, John Wiley & Sons, Hobiken, New Jersey, 2011.

[4] A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by its history*, Springer, Heidelberg in drugje, 2012.

[5] J. Plemelj, *Algebra in teorija števil*, SAZU, Ljubljana, 1962.

[6] S. Schwartzman, *The words of mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington DC, 1994.

[7] J. Stillwell, *Mathematics and its history*, Springer, New York in drugje, 2010.

[8] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.

© Dr. Marko Razpet, Ljubljana 2015