Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo

Marko Razpet

ŠESTSTO ŠESTINŠESTDESET

Zgodovina matematike

Ljubljana, januar 2014

Kazalo

Predgovor

Števila kot taka, mislimo na naravna, so bila za ljudi od nekdaj zanimiva. Igrali so se na primer s kamenčki, semeni, kroglicami in podobnimi predmeti, jih razvrščali v ravne črte, v trikotnike, kvadrate in druge like, jih šteli in skušali najti pravila. Pitagorejci so številom pripisali veliko pomembnost. Prepričani so bili, da so števila (ἀριθμοί) in razmerja prisotna vsepovsod, tudi v naravi, družbi in vesolju.

V Mezopotamiji in Egiptu so števila začeli tudi zapisovati: v glino, kamen, na papirus. Egipčanski zapis je še najlaže razumeti, kar lahko opazimo v spodnji razpredelnici, kjer so po stolpcih števila zapisana z našimi, egipčanskimi, grškimi in hebrejskimi znaki. Z ustalitvijo alfabetov in vrstnega reda črk v njih so zapis števil poenostavili, saj ni bilo več treba napisati od enega do devetih enakih znakov. Tako so Grki in Hebrejci zapisovali števila kar s črkami. Število dvanajst so na primer Egipčani zapisali kot 𓎆𓏻, kar je pomenilo eno desetico in dve enici. Grki so dvanajst zapisali kot ιβ′, Hebrejci, ki berejo z desne na levo, pa kot יב.

1	𓏺	α′	א	10	𓎆	ι′	י	100	𓍢	ρ′	ק
2	𓏻	β′	ב	20	𓎇	κ′	כ	200	𓍣	ς′	ר
3	𓏼	γ′	ג	30	𓎈	λ′	ל	300	𓍤	τ′	ש
4	𓏽	δ′	ד	40	𓎉	μ′	מ	400	𓍥	υ′	ת
5	𓏾	ε′	ה	50	𓎊	ν′	נ	500	𓍦	φ′	ך = תק
6	𓏿	ϛ′	ו	60	𓎋	ξ′	ס	600	𓍧	χ′	ם = תר
7	𓐀	ζ′	ז	70	𓎌	ο′	ע	700	𓍨	ψ′	ן = תש
8	𓐁	η′	ח	80	𓎍	π′	פ	800	𓍩	ω′	ף = תת
9	𓐂	ϑ′	ט	90	𓎎	ϙ′	צ	900	𓍪	ϡ′	ץ = תתק

Egipčani so imeli tudi znake za večja števila: 𓆼 = 1000, 𓂭 = 10000, 𓆐 = 100000, 𓁨 = 1000000. Znak za 100000 je skozi zgodovino variiral: žaba, paglavec, ptica. Vse pisave, uporabljene zgoraj, obvlada LaTeX. S pridom jih bomo seveda uporabljali tudi v nadaljevanju.

V zgornji razpredelnici opazimo vseh 24 črk klasičnega grškega alfabeta. Ker je 24 znakov premalo, so Grki uporabljali za 6 znak stigma (ϛ), pa tudi črko digama (ϝ), za 90 črko kopa (ϙ, tudi ϟ), in za 900 znak sampi (ϡ). To je tako imenovani jonski ali miletski alfabetični številski sistem, sprejet v Atenah v prvem stoletju pred našo ero (pne.). V uporabi je bil tudi atenski akrofonični številski sistem, ki spominja na rimskega. Števila 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000 v tem sistemu so: Ι,Π,Δ,𐅄,Η,𐅅,Χ,𐅆,Μ,𐅇. Akrofonični je ta sistem zato, ker je Π prvi glas v besedi πέντε (pet), Δ prvi glas v besedi δέκα (deset), Η prvi glas v besedi ἑκατόν (sto), Χ prvi glas v besedi χίλιοι (tisoč) in Μ prvi glas v besedi μύριοι (deset tisoč). Beseda *akrofoničen* je sestavljena iz dveh grških: ἄκρος, kar pomeni *skrajni, vnanji, vrhnji, najvišji*, in φωνή, kar pomeni *glas, zvok, šum*. Znak za pet v grški klasični dobi ni bil tak Π, kot ga uporabljamo danes, ampak 𐅃. Ne smemo ga zamešati z današnjo črko Γ, nekdaj Γ.

Podobno so s svojim alfabetom števila zapisovali Hebrejci. Semitsko črko vav na 6. mestu so Grki nadomestili s stigmo (ϛ) oziroma digamo (ϝ). Stigma je nastala z združitvijo črk ς in τ. Potem gre vse lepo do črke pi (π), hebrejsko pe (פ) za število 80. Semitski tsadi so Grki zavrgli, Hebrejci pa ohranili kot צ za število 90. Črko kopa (ϟ, ϙ) so Grki uporabili za število 90, Hebrejci pa ustrezno črko kof (ק) za 100. Grki so svoje črke ρ, ς, τ uporabili za 100, 200, 300, Hebrejci pa ustrezne reš (ר), šin (ש) in tav (ת) za 200, 300, 400. Problem s števili 500, 600, 700, 800 in 900 so Hebrejci rešili z aditivnim zapisom: $500 = 400 + 100$ (תק), $600 = 400 + 200$ (תר), $700 = 400 + 300$ (תש), $800 = 400 + 400$ (תת) in $900 = 400 + 400 + 100$ (תתק) oziroma z zaključnimi črkami kaf (ך), mem (ם), nun (ן), pe (ף) in tsadi (ץ). Za razločevanje števil od navadnih besed so dodali še kako črtico (gereš, gerašajim).

Število šeststo šestinšestdeset, v običajni pisavi 666, ki je del naslova te razprave, bi zapisali v egipčanskem številskem sistemu kot 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺, v grškem alfabetičnem kot χξϛʹ, v grškem akrofoničnem kot 𐅅Η𐅄ΔΠΙ, v hebrejskem pa kot תרסו. Vidimo, da je grški alfabetični zapis še kar kratek. Njegova pomanjkljivost pa je v tem, da števila od milijona naprej ne moremo več zapisati na tak način. Tisoč, deset tisoč, stotisoč še gre, ker 27 znakov zadošča: ͵α, ͵ι, ͵ρ. Največje število, 999999 je v alfabetičnem sistemu ͵ϡ͵ϙ͵ϑϡϙϑʹ, v akrofoničnem pa gre le do 99999, to je 𐅇MMMM𐅆XXXX𐅅HHHH𐅄ΔΔΔΔΠIIII.

Pričujoče gradivo, ki obravnava število šeststo šestinšestdeset z matematičnega vidika, je nastajalo, ko smo v okviru splošnega izbirnega predmeta *Zgodovina matematike*, ki se je v zimskem semestru akademskega leta 2012/2013 prvič izvajal na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani, na hitro predelali zgodovino grške matematike in njen vpliv na islamsko in evropsko matematiko. Gradivo se ne ukvarja z religioznimi problemi in mistiko, ampak je napisano bolj kot kratka zbirka raznih zanimivosti. V razpravo so namreč vključena tudi trikotniška in kvadratna števila, ki so jih posebno častili že pitagorejci. Nekatera trikotniška števila so tudi kvadratna, kar zahteva uvedbo Pellove enačbe in njeno reševanje. Poleg vseh teh reči srečamo tudi zlato razmerje in praštevila.

Mimogrede bomo pojasnili izvor marsikatere besede, s katero opletamo v vsakdanjem govoru, ne da bi se zavedali, da prihaja iz stare grščine. S tem naj bi začutili vsaj delček veličine antične kulture. Komur pa to nič ne pomeni, temu ni pomoči in naj debato o tem raje preskoči. Nič pa ne bo odveč, če ponovimo klasični grški alfabet:

Α α	alfa	Ι ι	jota	Ρ ρ	ro
Β β	beta	Κ ϰ	kapa	Σ σ ς	sigma
Γ γ	gama	Λ λ	lambda	Τ τ	tav
Δ δ	delta	Μ μ	mi	ϒ υ	ipsilon
Ε ε	epsilon	Ν ν	ni	Φ φ	fi
Ζ ζ	zeta	Ξ ξ	ksi	Χ χ	hi
Η η	eta	Ο ο	omikron	Ψ ψ	psi
Θ ϑ	theta	Π π	pi	Ω ω	omega

Razvil se je iz feničanskega, ki je imel dvaindvajset črk, iz njega se je razvil tudi etruščanski, iz tega pa latinska abeceda, ki jo vsakodnevno uporabljamo. Feničani in drugi semitski jeziki nimajo črk za samoglasnike. Te so dodali Grki, ker je to zahteval njihov jezik.

Ljubljana, januar 2014 — Dr. Marko Razpet

1 Število človeka

V Bibliji kar mrgoli števnikov, zlasti v Genezi (grško Γένεσις, Stvarjenje), prvi knjigi Starega testamenta. Novi testament je bil napisan v grščini in ga sestavlja 27 knjig: 4 evangeliji (po Mateju, Luku, Marku in Janezu), Apostolska dela, 21 pisem apostolov in Razodetje. Iz Biblije smo prevzeli veliko besed in besednih zvez. Nemalo jih je grškega izvora. Vzemimo na primer vsem znano besedo *angel*. V grščini je to ἄγγελος, kar pomeni *poslanec, glasnik*, v Brižinskih spomenikih *krilatec božji*. Če vemo, da se v grščini γγ, γκ, γχ, γξ berejo kot *ng, nk, nh, nks*, potem nam grška beseda ni več toliko tuja. Glagol ἀγγέλλω pomeni *sporočim, razglasim, oznanim*. Srečamo ga tudi na spominski plošči v Termopilah, kjer so se Spartanci (Lakedajmonci) leta 480 pne. borili pod vodstvom Leonide proti številsko močnejšim Perzijcem in zaradi izdaje izdihnili do zadnjega moža. Naslednji Simonidesovi verzi so vtisnjeni v to ploščo:

> Ὦ ξεῖν', ἀγγέλλειν Λακεδαιμονίοις ὅτι τῇδε
>
> κείμεθα, τοῖς κείνων ῥήμασι πειθόμενοι.

To pomeni v prevodu Antona Sovréta, enega najboljših prevajalcev iz stare grščine v slovenščino, kar smo jih kadarkoli imeli:

> *Tujec, ki greš v Lakedaimon, povej, da še zmerom ležimo v klancu*
> *stražarji zvesti, kakor je velel ukaz.*

Ime so *Termopile*, Θερμοπύλαι, v antičnih časih težko prehodna soteska v Lokridi (Λοκρίς), dobile po tamkajšnjih toplih žveplenih vrelcih (okoli 40 °C). Dobesedno pomenijo *topla vrata*, iz θερμός, topel, gorek, vrel, razbeljen, vroč, in πύλη, vrata, vhod, soteska, klanec. Starodavno mesto Dubrovnik se ponaša z zahodnimi mestnimi vrati v obzidju. Tisti konec prelepega mesta se, ne slučajno, imenuje *Pile*. Dandanes je prehod v Termopilah zaradi morskega nanosa peska mnogo širši kot v času slavne bitke leta 480 pne. Pri Termopilah je bilo kasneje še več drugih bitk, zadnja leta 1941.

Beseda *evangelij* je tudi grškega izvora: εὐαγγέλιον namreč pomeni *vesela novica, vest*. Beseda je sestavljena. Prvi del, εὖ, je prislov in pomeni *dobro*.

Drugi del pa izvira iz prej omenjenega glagola ἀγγέλλω. Sv. Janez Evangelist je bil eden od dvanajstih apostolov, in sicer najmlajši. V grščini ἀπόστολος pomeni *odposlanec*. Ime *Janez* smo dobili iz grščine, kjer se uporablja ime Ἰωάννης. *Evangelij po Janezu* ali *Janezov evangelij* je v grščini Κατὰ Ἰωάννην Εὐαγγέλιον. Začne se z besedami:

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ Λόγος, καὶ ὁ Λόγος ἦν πρὸς τὸν Θεόν, καὶ Θεὸς ἦν ὁ Λόγος.

V začetku je bila Beseda in Beseda je bila pri Bogu in Bog je bila Beseda.

Morda je še komu všeč stavek, aktualen za naše izobraževanje oziroma za izobraževanje v kateremkoli obdobju, izrečen pa je bil na podelitvi nagrad Republike Slovenije na področju šolstva oktobra leta 2011, na Svetovni dan učiteljev:

V začetku je bila Beseda in Beseda je bila pri Učitelju in Učitelj je bila Beseda.

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ Λόγος, καὶ ὁ Λόγος ἦν πρὸς τὸν Διδάσκαλον, καὶ Διδάσκαλος ἦν ὁ Λόγος.

Pri nekaterih gimnazijskih predmetih je bilo nekoč zares tako.

Novi testament, grško Ἡ καινὴ διαθήκη, prvotno napisan v grščini, se konča z Janezovim *Razodetjem*, po grško Ἀποκάλυψις Ἰωάννου. Beseda *apokalipsa* pomeni tudi *odkritje, odstiranje*. Po izročilu naj bi ga napisal sv. Janez Evangelist, ko je bil zaradi svoje vere v pregnanstvu na otoku Patmos (Πάτμος) v Egejskem morju (Αἰγαῖον). Umrl naj bi okoli leta 100 v Efezu, kamor se je vrnil s Patmosa po smrti cesarja Domicijana.

Zanimiv je del stavka v prvem poglavju Razodetja:

Ἐγώ εἰμι τὸ Α καὶ τὸ Ω.

To pomeni

Jaz sem Alfa in Omega.

Z drugimi besedami: *Jaz sem začetek in konec.* Zgornje besede se v Razodetju še ponovijo. Pogosto v vsakdanjem življenju nevede uporabljamo te besede, ko hočemo povedati, da je nekdo strahovito pomemben oziroma da je to in to neogibno potrebno. Na začetku Razodetja lahko preberemo še:

Na Gospodov dan me je navdal Duh in za seboj sem zaslišal močen glas kakor glas trobente, ki je rekel: Zapiši, kar vidiš, v knjigo in pošlji sedmim Cerkvam: v Efez, v Smirno, v Pergamon, v Tiatiro, v Sarde, v Filadelfijo in Laodikejo!

Na ta citat se bomo še vrnili. Efez, Smirna, Pergamon, Tiatira, Sarde, Filadelfija, Laodikeja so bila mesta v Mali Aziji. Njihova grška imena so bila: Ἔφεσος, Σμύρνη, Πέργαμον, Θυάτειρα, Σάρδεις, Φιλαδέλφεια, Λαοδίκεια.

Veliko ljudi, ki kaj dajo na številke, pa zagotovo pozna iz Razodetja znameniti stavek o številu zveri: šeststo šestinšestdeset. To je tudi število človeka. Učenim glavam je to dalo misliti in kar nekaj časa so potratili, da bi s preračunavanjem našli njegovo ime, ki naj bi bilo zavozlano v številu šeststo šestinšestdeset. Razodetje pravi:

Ὧδε ἡ σοφία ἐστίν· ὁ ἔχων νοῦν ψηφισάτω τὸν ἀριθμὸν τοῦ θερίου, ἀριθμός γὰρ ἀνθρώπου ἐστίν· καὶ ὁ ἀριθμός αὐτοῦ ἑξακόσιοι ἑξήκοντα ἕξ.

Besedo pa le razumemo: σοφία pomeni modrost. Beseda ἀριθμός nam tudi ne bi smela biti tuja. Pomeni namreč število. Iz nje smo dobili besedo *aritmetika*. Pa še beseda ἄνθρωπος je nekam znana. Pomeni pa toliko kot *človek*. Iz nje so se razvile znanstvene besede *antropologija, antropološki, antropoid, antropometrija, antroponim* in druge. Prevod zgornjega grškega besedila se glasi:

Tu je modrost. Kdor ima um, naj izračuna število zveri: je namreč število človeka. To število pa je šeststo šestinšestdeset. (Razodetje (13:18))

2 Izopsefija in gematrija

Izopsefija (ἴσος, enak, isti, podoben, sličen; ψῆφος, kamenček za računanje, štetje, glasovanje) je veščina igračkanja z besedami, ki imajo isto vsoto števil, prirejenih posameznim črkam.

Nemški matematik Michael Stifel (1487–1567) je cenil svoje *računanje z besedami* bolj kot svoja pomembna dela.

Baje je neki Armenec zapisal:

$$666 = 50 + 200 + 6 + 50 + 100 + 60 + 200,$$

kar ustreza vsoti hebrejskih številk נ, ר, ו, נ, ק, ס, ר.

Iz tega je sklepal, da število šeststo šestinšestdeset pripada osebi z imenom נרון קסר, *Nerun Kæsar*, krutemu rimskemu cesarju Neronu (37–68). Bile pa so še druge razlage, komu pripada število šeststo šestinšestdeset.

Število šeststo šestinšestdeset imenujejo tudi *zlodejevo število*. Beseda *zlodej* je stara, najdemo jo že v Brižinskih spomenikih. Zanimivo je, ker ga lahko zapišemo z osnovnimi rimskimi številkami I, V, X, L, C in D:

$$\mathrm{DCLXVI} = 666.$$

Grki so število šeststo šestinšestdeset zapisali po svoje: χξϛ′ (hi, ksi, stigma).

Božji glas je sv. Janezu, kot smo videli, naročal:

Zapiši, kar vidiš, v knjigo in pošlji sedmim Cerkvam: ...

Ὃ βλέπεις γράψον είς βιβλίον καὶ πέμψον ταῖς ἑπτὰ ἐκκλησίαις, ...

Na podlagi tega obstajajo živahne razprave, v kakšni obliki je sv. Janez videl število šeststo šestinšestdeset. Zagotovo ne v obliki 666, ker okoli leta 100 še niso poznali arabsko-indijskih števk. Morda je videl grški zapis χξϛ′, morda hebrejski תרסו, morda nekaj drugega.

Število šeststo šestinšestdeset najdemo tudi v Starem testamentu, grško Ἡ παλαιὰ διαθήκη, tudi *Septuagint*, ker gre za prevod sedemdesetih knjig v grščino, Ἑβδομήκοντα.

V prvi Knjigi kraljev (10:14) piše:

Zlato, ki se je letno stekalo k Salomonu, je tehtalo šeststo šestinšestdeset zlatih talentov, poleg dajatev trgovcev, prometa prekupčevalcev in prispevkov vseh arabskih kraljev in deželnih upraviteljev.

Podobno poročilo je v drugi Kroniški knjigi (9:13):

Zlato, ki se je letno stekalo k Salomonu, je tehtalo šeststo šestinšestdeset zlatih talentov, ...

Talent (τάλαντον) je bila utežna mera. Babilonski talent je bil enakovreden našim 30,3 kg, atiški talent 26 kg, tisti v Novem testamentu pa celo 58,9 kg.

V knjigi Ezra (2:13) beremo, da je bilo

Adonikámovih sinov šeststo šestinšestdeset ...

Po teh besedah bi lahko sklepali, da število šeststo šestinšestdeset le ni tako strašno slabo.

Gematrija, tudi *gimatrija*, pa je beseda, ki so jo uporabljali Hebrejci. Ni popolnoma jasno, kako je nastala. Je hebrejska izposojenka iz grščine. Pomeni pa prav tako nadomeščanje števil s črkami, in sicer iz hebrejskega alfabeta. Beseda *gematrija* se v hebrejščini zapiše kot גימטריה, kar se izgovori kot *gimatrija*.

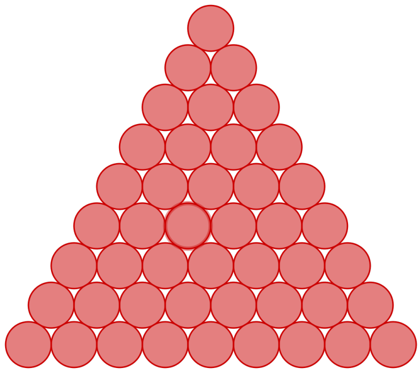
Pripomnimo še, da v nekaterih prepisih Razodetja iz prvih stoletij krščanstva namesto šeststo šestinšestdeset, χξϛ′, kot število zveri v nekih starodavnih prepisih v prvih stoletjih krščanstva stoji število šeststo šestnajst, χιϛ′, kar je z besedami ἑξακόσιοι δέκα ἕξ. Cerkveni očetje so v Razodetju ustalili število šeststo šestinšestdeset in razlagali, da se je število šeststo šestnajst pojavilo kot napaka pri prepisovanju. Ohranjeni so celo fragmenti, na katerih se nedvoumno da prebrati število šeststo šestnajst, zapisano z grškimi alfabetičnimi številkami.

3 Trikotniška in kvadratna števila

Trikotniško število dobimo kot število enakih krožcev, ki jih zlagamo v trikotnik. Za osnovnico jih postavimo n, nato nanje $n-1$, na te spet $n-2$ in tako naprej, dokler gre. Na vrhu je samo eden. Število vseh krožcev, zloženih na tak način v trikotnik, je n-to trikotniško število T_n. Na sliki 1 je ponazorjeno deveto trikotniško število.

Torej je

$$T_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1.$$



Slika 1: Deveto trikotniško število.

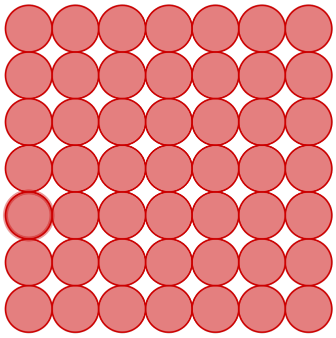
Ker pa je tudi
$$T_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n,$$
dobimo, če obe enakosti seštejemo:
$$2T_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1).$$
V novi vsoti je n sumandov, zato je
$$2T_n = n(n+1).$$
Zato je n-to trikotniško število T_n dano s formulo:
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2}.$$
Smiselno je vpeljati tudi $T_0 = 0$, kar je v soglasju z zgornjo formulo, ustreza pa tudi prazni množici krožcev. Za trikotniška števila velja preprosta rekurzivna zveza:
$$T_{n+1} = T_n + (n+1).$$
Zaporedje trikotniških števil je naraščajoče:
$$T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$$
Zapišimo zaporedje trikotniških števil:
$$(T_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots).$$

Število tistih celih števil r, ki ustrezajo pogoju

$$T_n \leq r < T_{n+1},$$

je natanko $n+1$.

Kvadratno število dobimo kot število enakih krožcev, ki jih zlagamo v kvadrat. Za osnovnico jih postavimo n, nato pa nanje spet n, dokler ne izpolnimo vsega skupaj n plasti. Število vseh krožcev, zloženih v kvadrat, je n-to kvadratno število Q_n. Očitno je $Q_n = n^2$. Tako kot pri trikotniških številih je smiselno vzeti $Q_0 = 0$. Na sliki 2 je ponazorjeno sedmo kvadratno število.



Slika 2: Sedmo kvadratno število.

Kako pravzaprav lepo razporediti krožce, da dobimo enakostranični trikotnik oziroma kvadrat (slika 1, slika 2)? Za ponazoritev $p+1$-tega trikotniškega števila postavimo v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu središča krožcev točke

$$\left(\frac{i+j}{2}, \frac{i-j}{2}\sqrt{3}\right),$$

pri čemer dovolimo, da celo število i teče po ena od 0 do p, celo število j pa od 0 do i.

Za ponazoritev $p+1$-tega kvadratnega števila je še laže: središča krožcev postavimo v točke (i, j), pri čemer i in j tečeta po ena, neodvisno eno od drugega, od 0 do p.

Vsota dveh zaporednih trikotniških števil pa je kvadratno število:

$$T_n + T_{n+1} = (n+1)^2 = Q_{n+1}.$$

Zapisano formulo preverimo s preprostim računom:

$$T_n + T_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+1}{2}(n+n+2) = (n+1)^2 = Q_{n+1}.$$

Relacijo lahko nazorno ponazorimo tudi s sliko 3. V zgornjem pravokotnem trikotniku s katetama $n+1$ je T_{n+1} krožcev, v spodnjem s katetama n pa T_n krožcev. Vseh krožcev v kvadratu pa je $Q_{n+1} = (n+1)^2$.

Zaporedje kvadratnih števil je naraščajoče:

$$Q_0 < Q_1 < Q_2 < Q_3 < \ldots$$

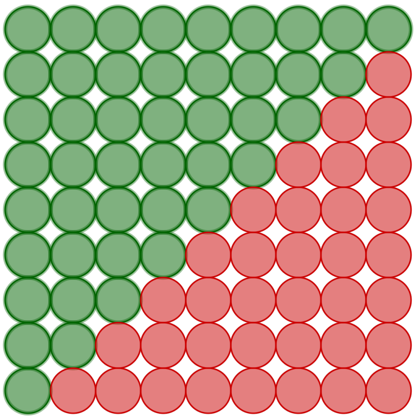
Zapišimo še zaporedje kvadratnih števil:

$$(Q_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots).$$

Število tistih celih števil r, ki ustrezajo pogoju

$$Q_n \leq r < Q_{n+1},$$

je natanko $2n+1$. Torej jih je liho število.



Slika 3: Kvadratno število je vsota dveh trikotniških števil.

Ni vsako nenegativno celo število N kvadratno, prav tako ni vsako trikotniško. Odgovor, kdaj je N kvadratno število, najdemo s korenjenjem. Če je

$s = \sqrt{N}$ tudi nenegativno celo število, potem je $N = s^2 = Q_s$ ravno s-to kvadratno število.

Odgovor na vprašanje, kdaj je N trikotniško število, tiči v kvadratni enačbi

$$\frac{n(n+1)}{2} = N,$$

ki ima rešitvi

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8N+1}}{2}.$$

V poštev pride le nenegativna rešitev

$$s_1 = \frac{\sqrt{8N+1} - 1}{2}.$$

Vidimo, da je N trikotniško število tedaj in samo tedaj, ko je $8N + 1$ liho kvadratno število. Tedaj je tudi $\sqrt{8N+1}$ liho število in $s = s_1$ je s tem nenegativno celo število, za katero je $T_s = N$.

V splošnem pa lahko za N poiščemo taki zaporedni trikotniški števili T_n in T_{n+1}, za kateri je

$$T_n \leq N < T_{n+1}.$$

Preprosto vzamemo

$$n = \lfloor s_1 \rfloor,$$

pri čemer oznaka $\lfloor x \rfloor$ za realno število x pomeni največje celo število, ki ne presega x. Primer: $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lfloor -4 \rfloor = -4$, $\lfloor -5.5 \rfloor = -6$.

Zlodejevo število, kakor popularno imenujejo število zveri oziroma število človeka v Razodetju, to je število 666, je trikotniško. Če nastavimo enačbo

$$\frac{n(n+1)}{2} = 666,$$

hitro dobimo rešitev $n = 36$. Torej je 666 ravno 36. trikotniško število. Število 36 pa je 8. trikotniško in 6. kvadratno: $36 = 8 \cdot 9/2 = 6^2$. Torej je 666 celo *dvojno trikotniško število*: $666 = T_{T_8}$. Osmo po vrsti. Velja pa tudi $666 = T_{Q_6}$.

V izpeljavi formule za n-to trikotniško število smo mimogrede našli formulo, kako sešteti prvih n zaporednih naravnih števil. Tako je Gauß, ko je bil še majhen šolarček, seštel vsa naravna števila od 1 do 100. Takoj, ko je učitelj dal nalogo, da bi nekaj časa imel pred učenci mir, je Gauß povedal rezultat: 5050. Nato mu je moral razložiti, kako je to tako hitro izračunal. Povedal je tako, kot mi malo prej. Učitelj je takoj spoznal, da iz fanta še nekaj bo. Na osnovni šoli so nam to zgodbo pripovedovali že v šestem razredu, na gimnaziji pa tudi, in sicer v četrtem letniku, ko smo obravnavali aritmetična zaporedja.

Isti prijem se obnese pri kateremkoli aritmetičnem zaporedju

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

za katerega je značilno, da je razlika dveh sosednjih členov stalna:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = d.$$

Aritmetično zaporedje je določeno, čim poznamo njegov prvi člen a_1 in razliko ali diferenco d. Brez težav lahko zapišemo n-ti člen aritmetičnega zaporedja:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Vsota S_n prvih n členov aritmetičnega zaporedja je

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

v obratnem vrstnem redu pa

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1.$$

Če obe vsoti seštejemo in združimo po dva in dva člena, dobimo:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1).$$

Zapišemo pa lahko

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_{n-1} = a_1 + a_n, a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_{n-2} = a_1 + a_n, \ldots,$$

tako da je nazadnje $2S_n = n(a_1 + a_n)$ in končno

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

V posebnem primeru zaporedja naravnih števil dobimo iz zadnje dobro znano formulo $S_n = n(n+1)/2$.

Zelo znan primer iz antike, kjer imamo opravka s trikotniškimi in kvadratnimi števili, je znameniti Arhimedov problem o govedu (Πρόβλημα βοεικόν). Zapišimo ga v prevodu Franceta Križaniča:

Tujec, prisedi, preštej vse Sončevo lepo govedo.

(Bistrc nabrusi ostro, naloga bo, bogme, zavita.)

Pašnike sočne Trinakra, Sicilije polja preleti,

štiri boš črede našel, po pasmah jih ločil natanko:

Ta se kot mleko beli. Kot morja viharnega vali

temna je v oni živina. Rjavordeča je tretja,

z lisami zadnja pokrita. S pogledom jih vseh ne objameš,

množica bikov krepkih že šteje nesluteno moč.

Strašna je moč, a vendar pregledna. Poslušaj me, tujec:

Belih je bikov, poglej, prav toliko kolikor skupaj

temnih tretjina in pol z rjavimi biki nanese.

Črnih število dobiš, če lisastih bikov petini

brž četrtino dodaš in ruse v celoti navržeš.

Koliko, vedel bi rad, je lisastih bikov. Dodeni

bikom rjavim lepo sedmino in šesti del belih.

Pa se lotiva še krav po vrsti od črede do črede.

Belih število dobiš, če črne govedi tretjino

k delu četrtemu daš. Iz lisaste črede povzameš,

koliko črnih je krav: petini dodaj četrtino.

Lisaste krave preštela spet bova, tujec, brez muje:

Množico z isto močjo iz ruse sestavi živine,

vzemi od šestih en del, zedini ga z enim od sedmih.

Štetje rjavih samic na belo nasloniva čredo:

pol le tretjine dodaj sedmini.

Zdaj si ti na vrsti.

Koliko vsake govedi Sonce vardeva, povej mi,
bikov mogočnih in krav z bogatimi vimeni mleka.
Če boš pravilno preštel od glave do glave vse črede,
spretno s števili ravnaš – rad ti bom, tujec, priznal.
Ali med modrece, vedi, ne bom te z rojaki zapisal,
dokler pogojev še dveh ne vzameš pri štetju v zakup:
Bele in črne premešaj vse bike, tesno razpostavi,
kamor ti seže pogled v širino naj bo al' globino,
bik naj ob biku stoji. Na travnikih sicilijanskih
mukal in zemljo teptal tedaj bo kvadrat brez primere.
Bike marogaste v čredo postavi z rusimi skupaj,
enega najprej pa dva in dalje natanko v stopnicah,
v dir jih poženi. Po polju rohnel bo živi trikotnik.
Če še to zanko razmotaš, prevrtaš z ostrim razumom,
čredam orjaškim moči do repa natanko pretehtaš,
z zmago odidi odtod. Ponosnega spremljaj te slava,
da si visoko nad nas v modrosti se, tujec, povzpel.

Pozoren je treba biti na stavek

Na travnikih sicilijanskih mukal in zemljo teptal tedaj bo kvadrat brez primere.

Mišljeni so beli in črni biki, razporejeni v kvadrat, tako kot kroglice na naši sliki 2. Stavek

Po polju rohnel bo živi trikotnik.

pove, da so mišljeni marogasti in rusi biki, razporejeni v trikotnik, tako kot kroglice na naši sliki 1. Arhimedov problem o govedu nas pripelje do Pellove enačbe

$$x^2 - 410\,286\,423\,278\,424y^2 = 1,$$

katere rešitve so ogromna števila.

Nenegativna cela števila sestavljajo množico

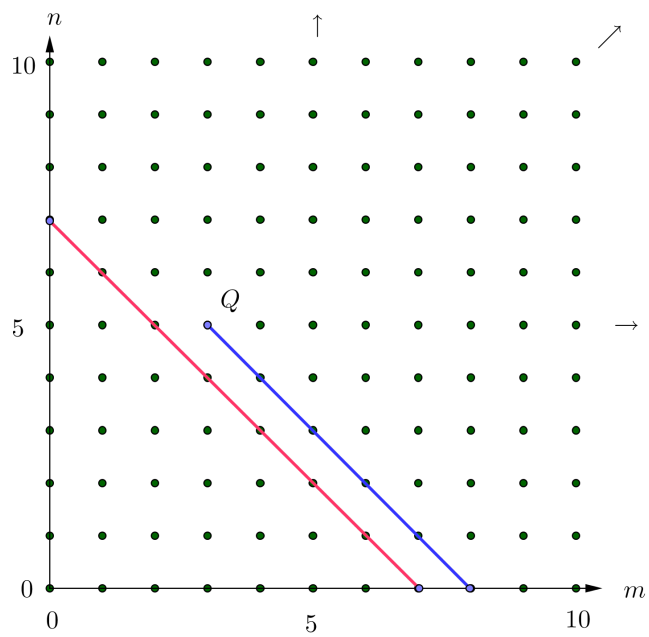
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

To je števno neskončna množica, ki je v nekem smislu najmanjša neskončna množica. Zanima nas, koliko je urejenih parov (m, n), ko sta m in n nenegativni celi števili. Vprašajmo se, koliko je močna množica

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n); m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\},$$

kartezični produkt množice $\mathbb{N}$ samo s seboj.

Kartezični produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lahko grafično predstavimo kot množico točk v prvem kvadrantu pravokotnega kartezičnega koordinatnega sistema (slika 4).



Slika 4: Nazorna predstavitev množice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Vzemimo na piko točko $Q(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Očitno leži Q na premici, ki ima enačbo $m + n = p + q$. Na tej premici je $p + q + 1$ točk iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Sosednja premica, ki ima enačbo $m + n = p + q - 1$, pa vsebuje $p + q$ točk iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ta premica in koordinatni osi omejujeta trikotnik z oglišči $(0,0), (p+q-1,0), (0,p+q-1)$. Na njegovem robu in v njegovi notranjosti je $T_{p+q} = (p+q)(p+q+1)/2$ točk iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Na daljici od točke $(p+q,0)$ to točke $Q(p,q)$ je $q+1$ točk. Omenjeni trikotnik in ta daljica imata skupaj $T_{p+q} + q + 1$ točk, ki jih oštevilčimo z

$$0, 1, 2, \ldots, T_{p+q}, \ldots, T_{p+q} + q.$$

S predpisom $\psi(p,q) = T_{p+q} + q$ smo definirali preslikavo ψ iz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ v $\mathbb{N}$. Številčenje poteka po vzporednicah premice $n + m = 0$ v smeri od abscisne proti ordinatni osi, na primer:

$$\psi(0,0) = 0,$$

$$\psi(1,0) = 1, \psi(0,1) = 2,$$

$$\psi(2,0) = 3, \psi(1,1) = 4, \psi(0,2) = 5,$$

$$\psi(3,0) = 6, \psi(2,1) = 7, \psi(1,2) = 8, \psi(0,3) = 9,$$

$$\psi(4,0) = 10, \psi(3,1) = 11, \psi(2,2) = 12, \psi(1,3) = 13, \psi(0,4) = 14.$$

Pokažimo, da za vsako število $N \in \mathbb{N}$ obstaja natančno en tak par $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, za katerega je $\psi(m,n) = N$.

Vsako število $N \in \mathbb{N}$ leži med dvema zaporednima trikotniškima številoma, tako da je

$$T_x \leq N \leq T_{x+1} - 1 = T_x + x,$$

pri čemer je $x \in \mathbb{N}$ natančno določen. Naj bo $q = N - T_x \in \mathbb{N}$. Tudi število q je natančno določeno. Označimo še $p = x - q$. Ker je $p = x - q = x-(N-T_x) = (T_x+x)-N \geq 0$, je tudi število $p \in \mathbb{N}$ natančno določeno. Torej lahko na en sam način zapišemo $N = T_{p+q} + q = \psi(m,n)$. Preslikava ψ zato bijektivno preslika $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sta si zato ekvipolentni, obe štejeta enako mnogo elementov. Tudi množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ sta si zato ekvipolentni. Ustrezna preslikava je na primer dana s predpisom:

$$\varphi(p,q,r) = \psi(\psi(p,q), r).$$

4 Kompleks Hilbertovih hotelov

Zamislimo si števno neskončen hotelski kompleks, to je števno neskončno mnogo hotelov, od katerega ima vsak števno neskončno sob, oštevilčenih s številkami $0, 1, 2, 3, \ldots$ Hoteli so prav tako oštevilčeni: $H_0, H_1, H_2, \ldots$ Nekega dne so vsi hoteli polno zasedeni, direktor kompleksa pa prav na ta dan začne z obnovo hotelov $H_1, H_2, H_3, \ldots$ Odloči se, da preseli vse goste v hotel H_0, tako da vsak gost dobi svojo sobo. Kako naj to naredi? Gost v tem hotelskem kompleksu je tudi neki matematik, ki se ravno vrača iz Göttingena domov in se je odločil, da malo podaljša dopust v teh hotelih. Matematik dobro obvlada funkcijo ψ iz prejšnjega razdelka in svetuje direktorju, da naj se gost, ki prebiva v sobi številka p v hotelu H_q preseli v sobo številka $\psi(p, q)$ hotela H_0. Direktor se s predlogom takoj strinja pri pogoju, da predlagatelj ljudem pomaga, če se bo komu kaj zataknilo. Matematik, ki je bil nastanjen v hotelu H_{666} v sobi številka 666, se je selil v hotel H_0 v sobo številka $T_{666+666} + 666 = 888\,444$. Gost pa se je iz te sobe moral umakniti v sobo številka $T_{888\,444} + 0 = 394\,666\,814\,790$.

Gospe Françoise iz Pariza je bila dodeljena v hotelu H_0 soba številka $222\,222$, a je takoj po preselitvi opazila, da je v prejšnji sobi pozabila svoje kozmetične pripomočke. Pozabila je ime hotela in številko sobe. Prosila je matematika, naj ji pomaga najti pot nazaj, še preden se delavci zapodijo v prenovo. Matematik je takoj izračunal, da mora gospa v hotel H_{111} v sobo številka 555 po svoje pozabljene stvari. Kako mu je to uspelo? Ker je vedel za funkcijo ψ, mu ni bilo težko. Poiskal je trikotniško število T_x, za katero je $T_x \leq 222\,222 < T_{x+1}$. nastavil je enačbo $x(x+1)/2 = 222\,222$ in našel pozitivno rešitev $s = 666.1665208$, iz katere je sklepal: $x = 666$. Nato je izračunal $T_{666} = 222\,111$. Ker je $q = 222\,222 - 222\,111 = 111$ in ker je $666 - 111 = 555$, je pozabljivi Françoise lahko napisal na listek, da naj gre po svoje pozabljene stvari v sobo številka 555 v hotelu H_{111}.

Bil pa je med gosti hotelov neki ostareli možakar, ki se je tudi moral preseliti v hotel H_0, a je revež pozabil, v katerem hotelu je bil in v kateri sobi, izgubil pa je tudi listek, na katerem je pisalo, kam se mora preseliti. Spomnil pa se je, da je številka njegove sobe bila enaka številki hotela, zadnja števka pa je bila 2. Po številu apostolov pa se je še spomnil, da se mora seliti v hotel H_0 v sobo s šestmestno številko, ki se konča na 12. Kako bi mu pomagali najti pravo sobo?

Naj bo številka hotela in sobe pozabljivega starca pred selitvijo $10m+2$, po selitvi pa $100n+12$. Pri tem sta m in n naravni števili. Zapisa sledita iz njegovih podatkov. Veljati mora torej enačba $\psi(10m+2, 10m+2) = 100n+12$. Če jo zapišemo v razviti obliki, dobimo:

$$\frac{(20m+4)(20m+5)}{2} + 10m + 2 = 100n + 12.$$

Po poenostavitvi dobimo enačbo $m(2m+1) = n$. Število $100n$, povečano za 12, mora biti šestmestno, kar pomeni, da mora veljati relacija $1\,000 \leq n \leq 9\,999$. Kandidatov za število m je 48: vsa naravna števila od 23 do 70. Preveč, da bi našli pravo številko sobe. Na srečo se je starec spomnil, da ima njegova nova soba v številki tri zaporedne petke, ni pa vedel, ali v sredini ali na začetku. V poštev sta prišli samo številki ?55512 in 555?12. Matematik je hitro našel edino rešitev: $m = 57, n = 6\,555$, Problem je bil rešen: Starec se je selil iz sobe številka 572 hotela H_{572} v sobo številka 655512 hotela H_0.

Hilbertove hotele s števno neskončno mnogo sobami si je leta 1920 izmislil matematik David Hilbert (1862–1943), da bi pojasnil neskončne množice. Seveda so njegovi hoteli čista abstrakcija. Nemogoče je zasesti vse sobe, saj ni na razpolago toliko ljudi, ki bi zasedli vse. Vseh v nekem trenutku živečih ljudi je sicer mnogo, a še vedno ne neskončno. So pa še drugi razlogi, ki nasprotujejo obstoju takega hotela v realnem svetu.

Med $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ še zdaleč ni edina bijekcija funkcija ψ. Prav tako je dobra funkcija χ, dana s predpisom $\chi(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$. Za dokaz njene bijektivnosti je treba uporabiti izrek o enoličnem razcepu naravnega števila na prafaktorje. Za dano število $N \in \mathbb{N}$ pa točka (m,n), za katero je $N = \chi(m,n)$, skače po $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ precej bolj zagonetno.

Moč vsake števno neskončne množice običajno označujemo z $\aleph_0$. Moč številskih množic $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ je torej $\aleph_0$. Na podoben način, kot smo spoznali, da je moč množice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tudi $\aleph_0$, ugotovimo, da je moč množice racionalnih števil $\mathbb{Q}$ tudi $\aleph_0$.

5 Trikotniška kvadratna števila

Trikotniška števila $T_0 = 0 = 0^2 = Q_0, T_1 = 1 = 1^2 = Q_1, T_8 = 36 = 6^2 = Q_6$ so kvadratna. Ali razen teh obstajajo še druga trikotniška kvadratna števila? Izkaže se, da jih je neskončno mnogo. Kako jih poiskati?

Naj bo $T_p = Q_q$ za neki $p \in \mathbb{N}$ in neki $q \in \mathbb{N}$. To pomeni, da morata p in q zadoščati enačbi

$$p(p+1) = 2q^2.$$

Prepišemo jo v obliko

$$(2p+1)^2 = 2(2q)^2 + 1.$$

Vpeljimo $x = 2p + 1$ in $y = 2q$, pa smo pri *Pellovi enačbi*

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

To je poseben primer diofantske enačbe. Zanimajo nas celoštevilske rešitve (x, y). Pravzaprav nas negativna x in y ne zanimata, tako da bomo rešitve (x, y) iskali v množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Trivialna rešitev* je par $(x_0, y_0) = (1, 0)$, ki ustreza relaciji $T_0 = Q_0$, relaciji $T_1 = Q_1$ pa *osnovna rešitev* $(x_1, y_1) = (3, 2)$. Ker je $x^2 - 2y^2 = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})$, pridemo na misel, da bi študirali števila oblike $x + y\sqrt{2}$, kjer sta x in y celi števili. Kdaj je tako število enako 0? Če bi bil $y \neq 0$, bi dobili $\sqrt{2} = -x/y$, kar bi pomenilo, da je $\sqrt{2}$ racionalno število. To ne gre, zato je $y = 0$, s tem pa tudi $x = 0$. Števili $x + y\sqrt{2}$ in $u + v\sqrt{2}$ take sorte sta enaki natanko tedaj, ko je $(x, y) = (u, v)$. Če je namreč $x + y\sqrt{2} = u + v\sqrt{2}$, dobimo $(x - u) + (y - v)\sqrt{2} = 0$, kar pa gre le, kot smo pravkar videli, če je $x = u$ in $y = v$.

Sedaj zlahka pokažemo: če sta (u, v) in (r, s) rešitvi Pellove enačbe $x^2 - 2y^2 = 1$, potem to enačbo reši tudi (w, z), kjer je $w = ur + 2vs$ in $z = vr + us$. To je res, ker je

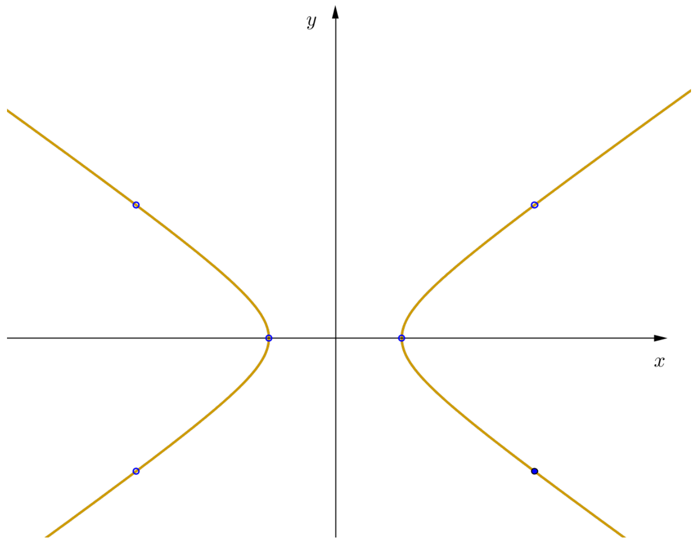
$$w^2 - 2z^2 = u^2r^2 + 4v^2s^2 - 2v^2r^2 - 2u^2s^2 = (u^2 - 2v^2)(r^2 - 2s^2) = 1.$$

Ker je $w + z\sqrt{2} = (u + v\sqrt{2})(r + s\sqrt{2})$, lahko rešitve (x_n, y_n) dobimo iz osnovne (x_1, y_1) kar s potenciranjem z nenegativnim eksponentom n:

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^n.$$

Izkaže se, da s tem dobimo vse rešitve Pellove enačbe $x^2 - 2y^2 = 1$. Vseh rešitev je neskončno mnogo. Za $n = 0$ dobimo trivialno, za $n = 1$ pa osnovno rešitev. Hitro se tudi vidi, da je v katerikoli rešitvi (x, y) prvo število vedno liho, drugo pa sodo. To pomeni, da sta tedaj $p = (x - 1)/2$ in $q = y/2$ nenegativni celi števili, za kateri je $T_p = Q_q$. Torej obstaja neskončno mnogo trikotniških kvadratnih števil. Nekaj prvih je zbranih v tabeli.

n	x	y	p	q	$T_p = Q_q$
0	1	0	0	0	0
1	3	2	1	1	1
2	17	12	8	6	36
3	99	70	49	35	1225
4	577	408	288	204	41616
5	3363	2378	1681	1189	1413721



Slika 5: Rešitve Pellove enačbe na hiperboli.

Rešitve Pellove enačbe so točke s celoštevilskimi koordinatami na hiperboli $x^2 - 2y^2 = 1$ v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu (slika 5).

Števila x_n in y_n lahko obravnavamo tudi rekurzivno, ker je

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^{n+1} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^n(x_1 + y_1\sqrt{2}).$$

To pomeni

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$$

in brez težav zapišemo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + 4y_n, \\ y_{n+1} &= 2x_n + 3y_n. \end{aligned}$$

Zgornji sistem zapišemo še v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz zadnje relacije dobimo končno

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Problem smo prevedli na potenciranje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Prvi stolpec potence A^n nam da x_n in y_n. Primer $n = 6$:

$$A^6 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} 19\,601 & 27\,720 \\ 13\,860 & 19\,601 \end{bmatrix}, \; x_6 = 19\,601, \; y_6 = 13\,860.$$

To pomeni $p = 9\,800, q = 6\,930$. Število $T_{9\,800} = 48\,024\,900$ je trikotniško kvadratno. Vidimo, da so taka števila vedno redkejša in vedno večja.

V resnici je govorjenje o *Pellovi enačbi* napačno, kajti zmotil se je sam Leonhard Euler (1707–1783), ki jo je imenoval po napačnem možu, Angležu Johnu Pellu (1611–1685). Bolj prav bi bilo, da bi jo imenoval po Pierru Fermatu (1601–1665). Sicer je Pellova enačba poseben primer diofantske enačbe, ki je dobila ime po grškem matematiku Diofantu iz Aleksandrije (Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς, 3. stoletje ne.). Tovrstne enačbe utegnejo biti kar trd oreh tudi za tiste velike matematike, ki ne delajo nič drugega kot matematiko.

6 Tetraedrska števila

Enake kroglice lahko zlagamo tudi v pravilno tristrano piramido, celo v pravilni tetraeder ali četverec (slika 6). Za osnovno plast vzamemo T_n kroglic, nato nanjo položimo T_{n-1} kroglic, to nadaljujemo in vrh zaključimo z eno kroglico. V tetraedru je tako

$$\mathcal{T}_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n$$

kroglic. Število $\mathcal{T}_n$ imenujemo n-to *tetraedrsko število*. Da bi dobili preprost izraz za $\mathcal{T}_n$, moramo sešteti

$$\mathcal{T}_n = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1).$$

Zapišimo v obliki, ki bo dala hitro rezultat:

$$\mathcal{T}_n = \frac{1}{6}(3(1^2+1) + 3(2^2+2) + 3(3^2+3) + \ldots + 3(n^2+n)).$$

Vsak člen lahko zapišemo nekoliko drugače:

$$\mathcal{T}_n = \frac{1}{6}(2^3 - 1^3 - 1 + 3^3 - 2^3 - 1 + 4^3 - 3^3 - 1 + \ldots + (n+1)^3 - n^3 - 1).$$

Vsota se sesede in ostane:

$$\mathcal{T}_n = \frac{1}{6}((n+1)^3 - n - 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Tako smo našli formulo za n-to tetraedrsko število:

$$\mathcal{T}_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}.$$

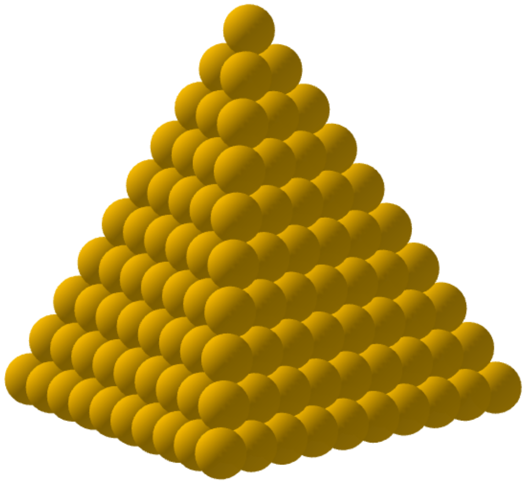
Smiselno je vzeti $\mathcal{T}_n = 0$, ki ustreza prazni množici kroglic.

Tetraedrska števila imajo preprosto rekurzivno formulo:

$$\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n + T_{n+1}.$$

Naštejmo še nekaj prvih tetraedrskih števil:

$$(\mathcal{T}_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, \ldots)$$



Slika 6: Deseto tetraedrsko število.

Med njimi ni zlodejevega, kateremu je najbliže $\mathcal{T}_{15} = 680$. Narisati kroglice, zložene v tetraeder, niti ni težko. Njihova središča so v točkah

$$\left(i + \frac{j}{2} + \frac{k}{2}, j\frac{\sqrt{3}}{2} + k\frac{\sqrt{3}}{6}, k\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

k teče po celih številih po ena od 0 do p, j po ena od 0 do $p - k$, i pa po ena od 0 do $p - k - j$. Če vzamemo za polmer kroglic $1/2$ ali manj, dobimo lepo predstavitev $p + 1$-tega tetraedrskega števila. Do zgornjega rezultata pridemo, če upoštevamo, da je višina enakostraničnega trikotnika s stranico 1 enaka $\sqrt{3}/2$, višina pravilnega tetraedra z robom 1 pa $\sqrt{6}/3$.

Tetraedrska števila je obravnaval že Jurij Vega v svojih predavanjih, ko je vojake učil na hitro izračunati število topovskih krogel, zloženih v pravilen tetraeder.

7 Pascalov trikotnik

Ko obravnavamo števila in binomske koeficiente, se je le težko izogniti Pascalovemu številskemu trikotniku (slika 7), v katerem nastopajo binomski koeficienti. Pascalov trikotnik so že veliko prej poznali Indijci, Kitajci, Perzijci in drugi. Naneslo pa je, da smo Evropejci prevzeli poimenovanje po

Francozu Blaisu Pascalu (1623–1662). Pascalov trikotnik širimo na podlagi enakosti

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Pri tem sta n in k nenegativni celi števili in $\binom{n}{k} = 0$, če je $n < k$. Binomski koeficienti so dobili ime po binomu ali dvočleniku. Če namreč razvijemo $(a+b)^n$, dobimo $n+1$ členov, v katerih nastopajo pred produktom $a^k b^{n-k}$ ravno binomski koeficienti. V Pascalovem trikotniku takoj opazimo zaporedje trikotniških števil $(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots)$ v tretji poševni vrsti, zaporedje tetraedrskih števil $(1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, \ldots)$ pa v četrti poševni vrsti.

$n = 0$	1									
$n = 1$	1	1								
$n = 2$	1	2	1							
$n = 3$	1	3	3	1						
$n = 4$	1	4	6	4	1					
$n = 5$	1	5	10	10	5	1				
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1			
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1		
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Slika 7: Pascalov trikotnik.

Pascalov trikotnik ima še polno drugih zanimivosti. Je simetričen glede na vertikalno simetralo. Vsota števil v njegovi n-ti vrstici je potenca 2^n za $n \geq 0$. Izmenične vsote po vrsticah so enake 0 razen za $n = 0$.

Nekateri napačno pripisujejo iznajdbo igralniške rulete Blaisu Pascalu. Res pa je, da je Pascal eden od začetnikov verjetnostnega računa in da je v tem smislu obdelal ruleto. Evropska ruleta ima 37 številk: $0, 1, 2, 3, \ldots, 36$. Njihova vsota je seveda $T_{36} = 666$, zlodejevo število. Verjetno ga je poznal tudi France Prešeren, ki je zapisal:

Farnih pet cerkva ima Gospod Bog v naši Ljubljani,

toliko tudi kasarn ima peklenska pošast.

Vabita Peter, Miklavž nas z Jakobam k Bogu Ljubljance,

vabi nas Janez Kerstnik, vabi Marija v nebo.

Hiše: kazino, redut, koloseum z njimi teater,

ima streliše hudič, svoje si cipce lovit.

8 Soda in liha števila

Cela števila sestavljajo števno neskončno množico

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \ldots\}.$$

Množica $\mathbb{Z}$ je disjunktna unija množic

$$\mathbb{Z} = \mathbb{S} \cup \mathbb{L},\ \mathbb{S} \cap \mathbb{L} = \emptyset,\ \mathbb{S} = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots\},\ \mathbb{L} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots\}.$$

Pri tem rečemo, da je $\mathbb{S}$ množica sodih, $\mathbb{L}$ pa množica lihih števil. Soda števila so deljiva z 2, liha pa ne. Simolično lahko tudi zapišemo:

$$\mathbb{S} = 2\mathbb{Z},\ \mathbb{L} = 2\mathbb{Z} + 1.$$

Zato lahko vsako sodo število n zapišemo kot $n = 2k$, liho pa kot $n = 2k + 1$, pri čemer je k neko celo število. Množice $\mathbb{Z}$, $\mathbb{S}$ in $\mathbb{L}$ imajo enako mnogo elementov, ekvipolentne so si. To pomeni, da obstaja med njimi bijektivna preslikava. Zato sta množici $\mathbb{S}$ in $\mathbb{L}$ prav tako števno neskončni kot $\mathbb{Z}$. Ustrezni bijekciji ni težko najti:

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{S},\ f(n) = 2n,$$
$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{L},\ g(n) = 2n + 1.$$

Tudi množici nenegativnih celih števil $\mathbb{N}$ in množica celih števil $\mathbb{Z}$ sta si ekvipolentni. Za funkcijo $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vzamemo predpis, ki sodim številom iz $\mathbb{N}$ priredi njihovo polovico, negativno predznačeno, lihim število iz $\mathbb{N}$ pa njihovo polovico, povečano za eno polovico.

$$h(n) = \begin{cases} -n/2, & n \in \mathbb{S} \cap \mathbb{N}, \\ (n+1)/2, & n \in \mathbb{L} \cap \mathbb{N}. \end{cases}$$

Malo zapleteno, a h je bijekcija, o čemer se lahko hitro prepričamo.

Že pitagorejci so vedeli, da je vsota dveh sodih števil tudi sodo število. Prav tako vsota dveh lihih števil. Vsota sodega in lihega števila pa je liho število. Zmnožek dveh lihih števil je liho število, medtem ko je zmnožek dveh števil sodo število, če je vsaj en faktor sod. Vsa praštevila so liha razen 2.

Besedi *sod* in *lih* sta nam nekoliko tuji, bolj sta nam navadno všeč ustrezni *paren* in *neparen*. Težko je razložiti, od kod sta besedi *sod* in *lih* prišli v slovenščino, saj ju, glede na uporabo v matematiki, med slovanskimi jeziki pozna samo še češčina. To seveda ne pomeni, da ju moramo Slovenci kar tako opustiti. Nasprotno, varovati ju moramo kakor kakšno redko rastlino ali ptico. Po Istri so nekoč uporabljali besedo *lih* v pomenu *neenak*.

Prof. M. Snoj v [10] in F. Bezlaj v [4] razlagata izvor teh dveh besed. Pridevnik *sod*, češko *sudý*, ima po njuni razlagi izvor v indoevropskih besedah *som-dheH*, kar pomeni *sestaviti, združiti*, in *som-dhH-o*, kar pomeni *sestavljen*. V praslovanščini *sǫdъ*. Sodo število pač nastane z združenjem dveh enakih delov. Po Istri so njega dni uporabljali tudi pridevnik *sodev* za moški in *sodva* za ženski spol.

Pridevnik *lih*, češko *lichý*, ima izvor v indoevropski besedi *leik*^{u}*-so*, kar domnevno pomeni *preostal, zapuščen*. Pri lihem število pač nekaj ostane, če ga skušamo razdeliti na dva enaka dela. V ruščini pomeni *лихой* po naše *zloben, zlovešč*, v starocerkvenoslovanščini pa *lixъ* pomeni *čezmeren, odvečen, pomanjkljiv*. V uporabi je bil tudi ustrezen prislov *liš*. Glagol *lihniti* je pomenil nekoč *opustiti*, *lišiti* pa *spraviti ob kaj*. V hrvaškem in srbskem govornem področju je zaslediti besedo *liho*, kar pomeni *ni na pare*, glagol *lihati se*, ki pomeni *igrati se soda in liha števila*, glagol *lihnuti* pomeni *uiti čemu*, pridevnik *lihoruk* pa *enorok*. Besede *sodoprst, lihoprst, sodopernat,* *lihopernat* v biologiji pa nam tudi niso neznane. Nekoliko zmede je napravila nemška beseda *gleich*, ki pomeni *enak, raven*, ki so jo mnoga slovenska narečja sprejela v obliki *glih*, z opustitvijo prvega glasu pa *lih*. Zato so pomen besed *sod* in *lih* ponekod nekaj časa med seboj zamenjevali.

Makedonci poznajo besedo пар za *dvojico, par*, zato uporabljajo za *sod, lih* besedi парен, непарен. Zanimivo, da poznajo tudi besedo чифт za *dvojico, par*. Nastala je iz turške besede *çift* v enakem pomenu.

Kako na prvi pogled spoznamo soda in liha števila? Zelo preprosto. V desetiškem sistemu zapisano celo število je sodo, če se konča na sodo števko (0, 2, 4, 6, 8), in liho, če se konča na liho števko (1, 3, 5, 7, 9). V dvojiškem sistemu pa je celo število sodo, če se konča na 0, in liho, če se konča na 1.

V nekaterih jezikih se besede *sodo (liho) število* in *praštevilo* zapišejo takole:

slovenščina	sodo	liho	število	praštevilo
hrvaščina	paran	neparan	broj	prosti broj
angleščina	even	odd	number	prime
danščina	lige	ulige	tal	primtal
grščina	ἄρτιος	περισσός	ἀριθμός	πρῶτος ἀριθμός
nemščina	gerade	ungerade	Zahl	Primzahl
francoščina	paire	impaire	nombre	nombre premier
latinščina	par	impar	numerus	numerus primus
italijanščina	pari	dispari	numero	numero primo
španščina	par	impar	número	número primo
češčina	sudé	liché	číslo	prvočíslo
poljščina	parzysta	nieparzysta	liczba	liczba pierwsza
slovaščina	párne	nepárne	číslo	prvočíslo
ruščina	чётное	нечётное	число	простое число
ukrajinščina	парне	непарне	число	просте число
bolgarščina	четно	нечетно	число	просто число
beloruščina	четны	нечетны	лік	простьі лік
madžarščina	páros	páratlan	szám	prímszám
turščina	çift	tek	sayı	asal sayı
esperanto	para	nepara	nombro	primo

Za grško besedo περισσός najdemo tudi περιττός. Slednja je samo atiška varianta prve. Podobno imamo na primer tudi ϑάλασσα in ϑάλαττα, kar pomeni *morje*. Opazimo, da večina omenjenih jezikov izvaja besedi *sod* in *lih* na podlagi pojma *dvojice, para*. Tudi Rusi: *sodo število* je po njihovo tudi чёт, *dvojica* pa чета.

Dolgo se že ve, kaj je *popolno število*, τέλειος ἀριϑμός. Naravno število n je *popolno*, če je enako vsoti svojih pravih pozitivnih deliteljev. Najmanjše popolno število je 6, ker so njegovi pravi pozitivni delitelji 1, 2, 3 in $1+2+3=6$. Naslednje popolno število je 28, ker ima prave pozitivne delitelje 1, 2, 4, 7, 14, za katere je $1+2+4+7+14=28$. Euler je dokazal, da je sodo število n popolno natanko tedaj, ko je $n=2^{p-1}(2^p-1)$, pri čemer sta p in 2^p-1 praštevili. Do danes pa še ni znano, če obstaja tudi kakšno liho popolno število. Popolna števila, ki so jih poznali že Grki, so 6, 28, 496 in 8128. Sicer do danes ne poznajo prav veliko popolnih števil. Zadnja odkrita so ogromna.

Vsa soda popolna števila so trikotniška, saj lahko zapišemo

$$2^{p-1}(2^p-1)=\frac{1}{2}(2^p-1)2^p=T_{2^p-1}.$$

Očitno so že v starih časih posvečali lihim in sodim številom precej pozornosti. Grški pisec Plutarh (Πλούταρχος), doma v Hajroneji (Χαιρώνεια) v Beociji (Βοιωτία), v svojem delu *Vzporedni življenjepisi* [8] (Βίοι παράλληλοι) opisuje življenje drugega rimskega kralja Nume Pompilija, ki je bil naslednik legendarnega Romula. Numa je vladal v letih 715–673 pne. Plutarh primerja Numo in spartanskega kralja Likurga (Λυκοῦργος). Likurg in Numa sta dala zakone vsak svoji državi.

Plutarhov del besedila, v katerem omenja liha in soda števila, se glasi:

καὶ τοῖς μὲν οὐρανίοις περισσὰ ϑύειν, ἄρτια δὲ τοῖς χϑονίοις

S tem je povedal:

Naj se bogovom na nebu daruje liho število žrtev, bogovom podzemlja pa sodo.

Liho število žrtev tisti, kateremu so namenjene, ne bo delil, za sodo število žrtev pa se naj v podzemlju stepejo po mili volji. Še danes pa velja v bontonu pravilo, da se dragi osebi poklanja liho število cvetov.

V kombinatoriki poznamo pojem *permutacije* ali *razporeditve*. Denimo, da imamo n števil $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, lahko pa tudi n različnih reči, ki jih po vrsti oštevilčimo s številkami od 1 do n. Zanima nas, na koliko načinov lahko ta števila razporedimo v urejeno n-terico $(1', 2', 3', \dots, n')$. Prav toliko je vseh bijektivnih preslikav množice z n elementi na množico z n elementi. Zato ne razlikujemo razporeditev in bijekcij, ki do te razporeditve reči privedejo. Pri taki bijekciji pišemo $k \mapsto k'$ za $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Navadno razporeditev zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1' & 2' & 3' & \dots & n' \end{pmatrix}.$$

Teh je po številu ravno $n!$, vključno z naravno razporeditvijo $(1, 2, 3, \dots, n)$. Na prvo mesto v razporeditvi $1', 2', 3', \dots, n'$ namreč lahko volimo n števil, na drugo eno manj, torej $n - 1$, na tretjo še eno manj, torej $n - 2$ in tako naprej, za predzadnje mesto nam ostaneta dve izbiri, za zadnje pa le eno. Torej je vseh razporeditev

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Marsikomu morda ni domača oznaka $n!$, kar beremo n-faktorsko, n-faktorialno ali n-fakulteta. Klicaj ne označuje konca velelnega stavka, pač pa je to naravno število, ki ga priredimo vsakemu nenegativnemu celemu številu n, in sicer takole:

$$0! = 1\,,\ 1! = 1\,,\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{za} \quad n > 1.$$

Tako je na primer $2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720$. Zaporedje s splošnim členom $a_n = n!$ očitno kar divje narašča in nas hitro popelje v vrtoglave višine. Zaradi klicaja v oznaki $n!$ se v matematiki radi izogibamo velelnih stavkov, ki bi bili dvoumni, na primer: *Sedaj pa pomnožimo števec in imenovalec ulomka z* $n!$, saj človek ne ve, ali z n ali s prej opredeljenim številom $n!$.

Do vsake razporeditve pa pridemo iz naravne samo s tako imenovanimi *transpozicijami*, z medsebojnimi zamenjavami dveh števil. Da pa se pokazati, da do dane razporeditve lahko pridemo s sodim ali z lihim številom transpozicij.

Prav tako iz dane razporeditve pridemo nazaj na naravno razporeditev ali s sodim ali z lihim številom transpozicij. Tako imamo za $n \geq 2$ natančno $n!/2$ takih razporeditev, ki zahtevajo sodo število transpozicij, da jih uredimo v naravno, in prav tako $n!/2$ takih, ki zahtevajo liho število transpozicij za prehod v naravno razporeditev. Prvim pravimo *sode*, drugim pa *lihe razporeditve*. Naravno razporeditev seveda štejemo za sodo.

V zvezi z razporeditvami omenimo *igro 15*, ki spada v kategorijo premičnic. V kvadratu, ki je razdeljen na 16 skladnih kvadratkov, je 15 ploščic, oštevilčenih s številkami od 1 do 15. Ploščice lahko premikamo levo in desno ter gor in dol. Vedno pa je en kvadratek prazen. Cilj igre je, da spravimo ploščice v naravni vrstni red. Ploščice lahko drsijo ena ob drugi in ob okvirju, ne moremo pa jih nenasilno izdreti iz njega.

Igro naj bi izumil leta 1870 Samuel Loyd (1841–1911), ameriški problemist, ugankar in razvedrilni matematik. Nekateri pa pravijo, da naj bi igro odkril ameriški poštar Noyes Palmer Chapman. Loyd je za rešitev ponudil za svoj čas veliko nagrado 1000 dolarjev, kar je povzročilo, da se je igra hitro razširila tako po ZDA kakor tudi po Evropi. Igrali so jo tako rekoč za vsakim vogalom. Igre ni moč pripeljati do konca, če so bile ploščice vstavljene po vrsti, le številki 14 in 15 pa sta bili med seboj zamenjani. Ploščice navadno poljubno premešamo in igro nekomu prepustimo. V nerešljivi varianti je Loyd ponudil igro, ki je seveda šla dobro v promet. Če pa so bile ploščice pravilno vstavljene, nato premešane, jih lahko z malo potrpljenja spet uredimo po vrsti. Rešljivost oziroma nerešljivost igre temelji na dejstvu, da vse razporeditve 16 reči delimo na sode in lihe. Iz sode je nemogoče preiti v liho ali obratno, kajti premik katerekoli ploščice pomeni transpozicijo te ploščice in praznega kvadratka.

Na sliki 8 je na levi strani naravna postavitev ploščic v igri 15, v sredini rešljiv primer, kar pomeni, da s premiki ploščic lahko dosežemo naravno postavitev, na desni pa nerešljiv primer, kar pomeni, da s premiki ploščic nikakor ne moremo doseči naravne postavitve.

Igra 15 ima v nekaterih jezikih zanimiva imena. V nemščini je to *15-Puzzle, 14–15-Puzzle, Schiebepuzzle, Schiebefax, Ohne-Fleiß-kein-Preis-Spiel*. Zadnje ime pomeni *Igra brez pridnosti ni nagrade*. Francozi igri pravijo *taquin*,

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	7	3
5	6	11	4
9	10	15	8
13	14	12	

1	2	7	3
5	6	11	4
9	10	15	8
14	13	12	

Slika 8: Igra 15.

Angleži *16-puzzle, Gem Puzzle, Boss Puzzle, Game of Fifteen, Mystic Square*, Italjani *gioco del quindici*, Španci *juego del 15*, Čehi *patnáctka*, podobno Rusi *пятнашки*.

9 Številske vrste

Sešteti končno mnogo začetnih členov neskončnega številskega zaporedja

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

ni problematično. Členi so iz nekega številskega obsega. Označimo

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Vsota S_n je spet število iz istega obsega. Hitro pa se srečamo s problemi, pri katerih je treba sešteti vse člene neskončnega zaporedja:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

Tak izraz imenujemo *številska vrsta*. Številu S_n pa pravimo n-ta *delna vsota* številske vrste. Grki seštevanju številskih vrst niso bili kos. Tudi dolgo za njimi so matematiki tavali v temi, dokler se nista izkristalizirala pojma *konvergence* in *limite* zaporedja. Z njima potem vpeljemo vsoto vrste

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

oziroma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n),$$

če zapisana limita obstaja kot število. Tedaj je vrsta konvergentna in S je njena vsota. Število S ni nujno v istem obsegu kot so členi vrste. Če limita ne obstaja, je vrsta divergentna.

Še najdlje so Grki prišli z geometrijskim zaporedjem

$$a_1, qa_1, q^2a_1, q^3a_1, \ldots$$

Pri tem je a_1 prvi člen, q pa kvocient geometrijskega zaporedja. Primer $q = 1$ ni zanimiv, ker je takrat zaporedje konstantno. Za geometrijsko zaporedje je značilno, da je kvocient dveh sosednjih členov stalen: enak je q. Za geometrijsko zaporedje je vsota prvih n členov

$$S_n = a_1 + qa_1 + q^2a_1 + q^3a_1 + \ldots + q^{n-1}a_1 = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}).$$

Formulo za tako vsoto dobimo z majhnim trikom: zapišemo produkt qS_n in zapišemo razliko:

$$S_n - qS_n = a_1(1 - q^n).$$

Torej je za $q \neq 1$

$$S_n = a_1\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Za $q = 1$ je $S_n = na_1$.

Opazimo, da je geometrijska vrsta konvergentna samo takrat, ko je $|q| < 1$. Tedaj je namreč $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ in vsota vrste je

$$S = a_1 + qa_1 + q^2a_1 + q^3a_1 + \ldots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Decimalni zapis realnega števila (lahko se brez škode za splošnost omejimo na pozitivno) $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ ni nič drugega kot številska vrsta decimalnih ulomkov:

$$x = a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + a_3 10^{-3} + \ldots$$

Zgodi se lahko, da so vse decimalke števila x od neke naprej enake 0. Število x je tedaj pravi ulomek, to se pravi kvocient dveh naravnih števil. Lahko pa je nešteto decimalk števila x različnih od 0. Tedaj je x lahko ulomek ali pa ne. Ulomek je samo v primeru, ko se mu skupina decimalk ponavlja. To skupino navadno označimo s črto zgoraj. Takrat imamo opravka s periodičnim decimalnim številom. Tudi v primeru, ko so vse decimalke števila x od neke naprej enake 0, lahko število zapišemo z neskončno mnogo decimalkami, s samimi devetkami od nekje naprej. Tako lahko na primer zapišemo

$$\frac{1}{2} = 0,5 = 0,4999\ldots = 0,4\overline{9}.$$

Zapis $x = 0,4\overline{9}$ pomeni

$$x = \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \ldots$$

Prevedemo na geometrijsko vrsto s kvocientom $1/10$, izračunamo in dobimo:

$$x = \frac{4}{10} + \frac{9/100}{1 - 1/10} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}.$$

S tem smo preverili enakovrednost obeh zapisov. Pretvorimo še število

$$x = 0,00\overline{150}$$

v ulomek. To lahko naredimo enostavneje, ne da bi uporabljali geometrijsko vrsto in njeno vsoto. Najprej je

$$100x = 0,\overline{150},$$

nato

$$100\,000x = 150,\overline{150},$$

z odštevanjem pa dobimo

$$100\,000x - 100x = 99\,900x = 150.$$

Na koncu imamo

$$x = \frac{150}{99\,900} = \frac{1}{666},$$

recipročno vrednost zlodejevega števila.

Za geometrijsko vrsto

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

ki ima kvocient $q = -1$, so bili nekoč v resni dilemi, kaj je z njo. Če jo namreč pišemo v obliki

$$S = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots,$$

je njena vsota enaka 0. Druga oblika

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \ldots$$

nam da vsoto 1. Če vstavimo $q = -1$ v izraz za vsoto dobimo

$$S = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}.$$

Trije različni rezultati! Nič čudnega, če je bilo treba svoj čas matematično analizo, kamor sodijo tudi zaporedja in vrste, postaviti na nove temelje.

Ni pa hud problem izračunati vsoto vrste, ki ima za člene obratne vrednosti trikotniških števil:

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4} + \ldots$$

Njena n-ta delna vsota je

$$S_n = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)}.$$

Vsak njen člen zapišemo kot razliko dveh ulomkov:

$$S_n = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \ldots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} S_n = 2$, dobimo

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4} + \ldots = 2.$$

Več preglavic je delala vrsta, ki ima za člene obratne vrednosti kvadratnih števil:

$$\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_3} + \frac{1}{Q_4} + \ldots,$$

to je vrsta

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Leta 1544 je problem, izračunati vsoto te vrste, zastavil Pietro Mengoli (1626–1686), rešil pa Leonhard Euler leta 1735. Euler je našel

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Problem so poimenovali *baselski problem*, po mestu Basel, kjer so delovali Bernoulliji in Euler. Kasneje je Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) vpeljal po njem imenovano funkcijo

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots,$$

ki konvergira za $s > 1$, in jo povezal s praštevili.

Podobno kot smo izračunali vsoto vrste, ki ima za člene obratne vrednosti trikotniških števil, lahko seštejemo vrsto iz obratnih vrednosti tetraedrskih števil:

$$\frac{1}{\mathcal{T}_1} + \frac{1}{\mathcal{T}_2} + \frac{1}{\mathcal{T}_3} + \frac{1}{\mathcal{T}_4} + \ldots$$

Njena n-ta delna vsota je

$$S_n = \frac{6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{6}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{6}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{6}{n(n+1)}.$$

Vsak njen člen zapišemo kot razliko dveh ulomkov:

$$S_n = \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{3}{3 \cdot 4} - \frac{3}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{3}{n(n+1)} - \frac{3}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{(n+1)(n+2)}.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} S_n = 3/2$, dobimo

$$\frac{1}{\mathcal{T}_1} + \frac{1}{\mathcal{T}_2} + \frac{1}{\mathcal{T}_3} + \frac{1}{\mathcal{T}_4} + \ldots = \frac{3}{2}.$$

10 Zlato razmerje

Že na osnovni šoli smo se učili z ravnilom in šestilom konstruirati pravilni petkotnik. Na gimnaziji smo sprva menili, da bomo s svojim znanjem geometrije in trigonometrije hitro doumeli, zakaj je konstrukcija taka, kot je. Toda obilica učenja nam dolgo ni dala, da bi se v pravilni petkotnik poglobili. V tablicah pa smo videli, da so podane točne vrednosti trigonometričnih funkcij tudi za kote $18°, 36°, 54°$ in $72°$, ne pa le za $30°, 45°$ in $60°$, kar je moral vsak gimnazijec znati na pamet. V teh vrednostih je bilo več ali manj korenov, na srečo le kvadratnih. O pomenu teh za konstrukcije samo z ravnilom in šestilom se takrat še nismo zavedali, pa tudi nihče nas ni na to opozoril.

Prva skupina zgoraj navedenih kotov pa se pojavi ravno pri pravilnem petkotniku. Oglejmo si razmere nekoliko pobliže. Stranico pravilnega petkotnika označimo z a, diagonalo pa z d (slika 9). Velja torej:

$$a = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA| = |AM| = |DM|,$$
$$d = |AD| = |AC| = |BD|.$$

Iz podobnih trikotnikov MBC in MDA takoj dobimo:

$$\frac{|BC|}{|BM|} = \frac{|AD|}{|AM|} \quad \text{oziroma} \quad \frac{a}{d-a} = \frac{d}{a}.$$

Pri tem je M presečišče diagonal $|AC|$ in $|BD|$. Podobnost trikotnikov smo obravnavali že na osnovni šoli, seveda bolj lahkotno. Zaresno, po Evklidovo, pa v prvem letniku gimnazije.

Po preureditvi zgornje relacije pridemo do preproste kvadratne enačbe za neznanko d/a:

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{d}{a} - 1 = 0$$

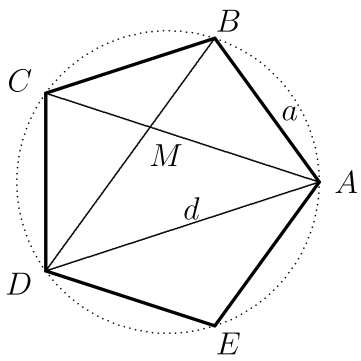
z rešitvama

$$\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \quad \text{in} \quad \frac{d}{a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Edina smiselna rešitev je seveda prva:

$$d/a = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Druga rešitev je negativna in tu ne pride v poštev. Število τ je poleg Pitagorovega izreka eden od biserov matematike in se pojavlja še marsikje. Imenujemo ga *zlato razmerje*. V pravilnem petkotniku je torej diagonala d



Slika 9: Pravilni petkotnik.

ravno τ-krat daljša od stranice a, to se pravi $d = \tau a$. Osnovna relacija za zlato razmerje je $\tau^2 = \tau + 1$.

Končajmo s presenečenjem, ki je povezano z zlodejevim številom 666. Dvakratni sinus kota $-666°$ je ravno zlato razmerje:

$$2\sin(-666°) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau.$$

To vidimo takole:

$$2\sin(-666°) = 2\sin(720° - 666°) = 2\sin 54°.$$

Kot $54°$ pa imamo v pravilnem petkotniku na sliki 9. To je ravno polovica notranjega kota pravilnega petkotnika. Ni namreč težko videti, da meri notranji kot pravilnega petkotnika $108°$, zato lahko v trikotniku DEA stranico $d = |AD|$ izrazimo kot $d/2 = a\sin 54°$, iz česar dobimo $2\sin 54° = d/a = \tau$.

Tako smo mimogrede našli $\sin 54° = \cos 36° = \tau/2$. Za kote $18°, 36°, 54°$ in $72°$ potem zlahka najdemo vrednosti vseh trigonometričnih funkcij. Te vrednosti lahko izrazimo, tudi ob pomoči pravilnega petkotnika, z osnovnimi štirimi računskimi operacijami in s kvadratnimi koreni. Ker poznamo tudi vrednosti kotnih funkcij za kote $30°, 45°$ in $60°$, lahko izračunamo točne vrednosti vseh trigonometričnih funkcij za vse cele mnogokratnike kota $3°$.

11 Praštevila

Praštevila so tista naravna števila, ki imajo natančno dva delitelja: ena in samo sebe. Ni težko našteti nekaj prvih praštevil:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

Števila

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots$$

so *sestavljena števila*, ker jih lahko zapišemo kot produkt praštevil. Število 1 je izjema: ni ne praštevilo ne sestavljeno število. Edino 2 je sodo praštevilo, preostala praštevila so liha. V zaporedju naravnih števil so porazdeljena vedno bolj na redko. Že Evklid (Εὐκλείδης, 4., 3. stoletje pne.) je znal dokazati, da je praštevil neskončno mnogo. Njegovo glavno delo so *Elementi* (Στοιχεῖα), zbirka trinajstih knjig, v katerih je zbral takratno matematično znanje. O praštevilih prvič spregovori v sedmi knjigi:

ια΄. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

Praštevilo je tako, ki je merljivo samo z enoto.

Za današnje pojme malo ohlapna definicija. Sestavljenemu številu Evklid pravi σύνθεντος ἀριθμός.

Arhimed (Ἀρχιμήδης) si je izmislil tako imenovani *problem o govedu* in ga poslal kot pismo Eratostenu v Aleksandrijo. Pri tem problemu sicer ne gre za praštevila, ki pa jih je dobro obvladal naslovljenec Eratosten. Običajno navajajo tudi naslov tega pisma:

Πρόβλημα,

ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ

περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν

ἐν τῇ πρὸς Ἐρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Eratostenes, grško Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναίος, je bil doma v Kireni, sedaj Šahat, arabsko شحات v Libiji. Svoj čas je vodil znamenito aleksandrijsko knjižnico. V osnovni šoli smo ga spoznali po Eratostenovem rešetu, s katerim presejemo naravna števila, tako da na mreži ostanejo samo praštevila. Morda je Eratosten, vsestranski učenjak starega sveta, še najbolj znan je po merjenju velikosti Zemlje na podlagi razlike kotov, pod katerima padajo sončni žarki ob istem času v dveh precej oddaljenih krajih na istem poldnevniku. Izračunal je razdaljo Lune in Sonca od Zemlje, narisal zemljevid takrat znanega sveta in še marsikaj drugega. Po Eratostenu se imenuje, kakor se za takega astronoma spodobi, tudi eden od kraterjev na Luni.

Arhimed je kot Grk dobro poznal tudi Homerja in njegova epa, Iliado in Odisejo. V Odiseji se večkrat omenja Trinakija in Helijevo govedo, ki ga Odisejevi možje ne bi smeli pobijati kljub lakoti, pa so vseeno ga, za kar so bili kaznovani in razen Odiseja nikoli več niso videli svoje domovine.

Poglejmo še, kaj Homer piše v dvanajsti knjigi Odiseje od 127. do 130. verza, kjer se omenja beseda Θρινακία:

Θρινακίην δ' ἐς νῆσον ἀφίξεαι: ἔνθα δὲ πολλαὶ

βόσκοντ' Ἠελίοιο βόες καὶ ἴφια μῆλα,

ἑπτὰ βοῶν ἀγέλαι, τόσα δ' οἰῶν πώεα καλά,

πεντήκοστα δ' ἕκαστα.

Mojstrski prevod Homerjevih del in seveda tudi teh verzov imamo v slovenščini. Odiseja v našem jeziku obstaja tudi v nevezani besedi in je prav prijetno branje, pa tudi v verzih ni tako težka. Zaradi ritma je besedni vrstni red tu in tam drugačen, kot smo ga vajeni. Srečamo pa v besedilu veliko besed, ki se redko uporabljajo ali pa so že pozabljene in jih, če imamo srečo, najdemo samo še v kakšnem starejšem slovarju, na primer besedo *mrkáč*, kar pomeni *plemenski oven*, pa tudi *neumen, pohoten moški*. Poglejmo, prevod Antona Sovréta pravkar omenjenega grškega besedila:

Dalje dospeš na Trinakijo otok. Le-ondi se pase

Heliu sila goved in sila rejene ovčadi,

sedem govejih krdel, prav toliko dróbnice lepe,

vsako po petdeset glav.

Veliko črnila je bilo prelitega v zvezi z besedo *Trinakija*, ki je sčasoma prešla v

Trinakrija, grško Τρινακρία. Homer ima v Odiseji besedo Θρινακία. Nekateri menijo, da gre za obliko otoka, ki ima tri rte, tri bradavice. Toda tri je po grško τρεῖς, τρία. Nekateri menijo, da Trinakija ni Sicilija, ampak neki drugi otok, lahko pa da je samo izmišljen.

V zvezi s praštevili je veliko problemov. Mnoge so matematiki že rešili, številne pa še ne. Včasih je problem v zvezi s števili lahko postaviti, odgovoriti nanj pa ne. Nekako v stilu, da neumnemu včasih tudi sto modrijanov ne zna odgovoriti. Tak primer je znamenita *Goldbachova domneva*, ki jo je postavil Christian Goldbach (1690–1764).

V zgodovini matematike se pogosto pojavlja prusko mesto Königsberg, danes Kaliningrad, nekoč cvetoče mesto ob Baltiku. V njem je živel filozof Immanuel Kant (1724–1804), v njem je krajši ali daljši čas delovalo kar nekaj znanih matematikov, na primer Christian Goldbach, Carl Gustav Jacob Jacobi, Friedrich Wilhelm Bessel, Ferdinand von Lindemann, David Hilbert, Adolf Hurwitz, Hermann Minkowski, Heinrich Weber. Če danes Nemce vprašate, kako je kaj danes s Königsbergom, odgovorijo, da to že davno ni več Königsberg, kar dobesedno pomeni *kraljeva gora*, ampak je samo še Калининград. Kaliningrad je danes v ruski enklavi, stisnjeni med Poljsko in Litvo. Študenti si navadno zapomnijo vsaj problem königsberških sedmih mostov, ki ga je rešil sam Euler in s tem postavil osnove kar dveh matematičnih področij: teorije grafov in topologije. Nekoliko teže ljudem gre v glavo, kaj pomeni, da je π transcendentno število. Ta trd oreh je leta 1882 strl ravno omenjeni Lindemann in s tem dokazal, enkrat za vselej, da kvadratura kroga z neoznačenim ravnilom in šestilom ni mogoča. Morda je s tem marsikomu prihranil trud, da bi rešil ta znameniti antični matematični problem. Še vedno pa ni bil nihče do danes kos Goldbachu. Goldbach je postavil domnevo, da se da *vsako* sodo število, ki je večje od 2, zapisati kot vsota dveh praštevil. Res je

$$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7,\ 12 = 5 + 7,$$

toda, da se tako da zapisati *vsako* sodo število, tega pa še nihče do danes ni zmogel *dokazati*.

Z Jacobijem se srečamo vsaj pri uvedbi novih spremenljivk v dvojni in trojni integral, kjer potrebujemo Jacobijevo determinanto. Tudi o preostalih königsberških matematikih bi lahko povedali kaj zanimivega, kar pa ni težko najti v bogati svetovni literaturi, ki je povezana z zgodovino matematike.

Leonhard Euler je že znal dokazati, da vrsta, katere členi so recipročne vrednosti praštevil, divergira:

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

Za $x > 0$ so začeli v 18. stoletju študirati funkcijo $x \mapsto \pi(x)$, ki pove, število praštevil, ki ne presegajo x. Ker je praštevil nešteto. je ta funkcija navzgor neomejena. Carl Friedrich Gauß (1777–1855) in Andrien-Marie Legendre (1752–1833) sta domnevala. da velja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

Leta 1896 sta to domnevo, ki jo imenujemo *praštevilski izrek*, neodvisno en od drugega, dokazala Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) in Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas de la Vallée Poussin (1866–1962). Slednjemu je leta 1928 belgijski kralj Albert I. (1875–1934), vladal (1909–1934)) podaril naslov *baron*. Tudi Jurij Vega (1754–1802) je leta 1800 postal baron. Njegove logaritemske tablice in tabele praštevil je uporabljal tudi Gauß.

Zlodejevo število ni praštevilo, ampak je sestavljeno število (10):

$$666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37 = 3 \cdot 6 \cdot 37.$$

Je tudi vsota dveh kvadratnih števil:

$$666 = Q_{15} + Q_{21} = 15^2 + 21^2.$$

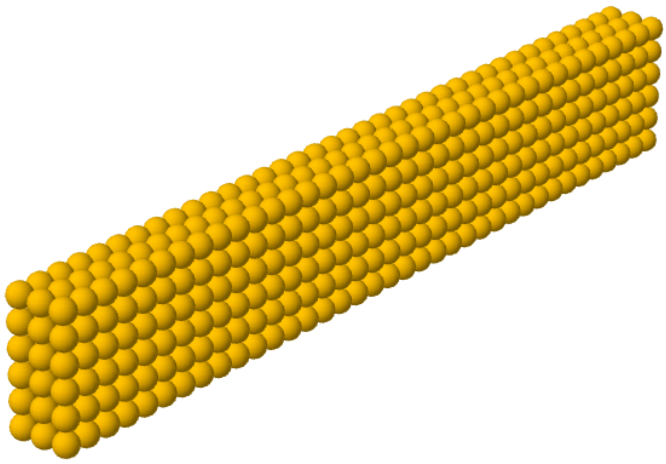
Števila 15, 21 in 666 so trikotniška in so v zgornji relaciji.

Lahko ga na več načinov zapišemo s števkami od 1 do 9, tako da vsako uporabimo le enkrat, na primer:

$$666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9.$$

Lahko ga zapišemo kot vsoto devetih *Fibonaccijevih števil*:

$$666 = F_1 + F_2 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} + F_{12} + F_{14}.$$



Slika 10: Šeststo šestinšestdeset kroglic.

Znamenita Fibonaccijeva števila F_n so definirana rekurzivno s formulo

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

kjer je $n \geq 2$. Pri tem je treba vzeti $F_0 = 0$ in $F_1 = 1$. Zapišimo še Fibonaccijevo zaporedje

$$(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots).$$

Fibonaccijeva števila so poimenovana po Leonardu iz Pise (1170–1250), imenovanem Fibonacci. Napisal je več knjig, od katerih je najbolj znana *Liber abaci*, v kateri med drugim razlaga arabsko-indijske številke in računanje z njimi. Živel je v času, ko jih je poznalo le malo ljudi v Evropi.

Podobno kot Fibonaccijeva so definirana *Lucasova števila* L_n rekurzivno s formulo

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

kjer je $n \geq 2$. Pri tem je treba vzeti $L_0 = 2$ in $L_1 = 1$. Zapišimo še Lucasovo zaporedje

$$(L_n)_{n=0}^{\infty} = (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, \ldots).$$

Hitro lahko preverimo, da je

$$666 = L_3 + L_6 + L_{10} + L_{13}.$$

Števila so dobila ime po francoskem matematiku Françoisu Édouardu Anatolu Lucasu (1842–1891). Leta 1876 je po 19 letih dela dokazal, da je število

$$M_{127} = 2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727$$

praštevilo. To je bilo takrat največje znano Mersennovo praštevilo. Mersennova števila M_n so števila oblike $M_n = 2^n - 1$, kjer je n naravno število. Če je M_p praštevilo, je tudi p praštevilo in M_p imenujemo *Mersennovo praštevilo*. Ni pa za vsako praštevilo p tudi M_p praštevilo. Za $p = 11$ je na primer $M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$.

Marin Mersenne (1588–1648) je bil francoski teolog, filozof, matematik in glasbeni teoretik, ki se je veliko dopisoval z nekaterimi takratnimi znanimi evropskimi matematiki.

Lucasova in Fibonaccijeva števila so povezana z zlatim razmerjem. Za vsako nenegativno celo število n namreč velja enakost

$$\tau^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}.$$

V decimalnem zapisu števila π, to je razmerja med obsegom in premerom kroga, nastopajo prvič tri šestice zapored na 2440., 2441. in 2442. mestu za decimalno vejico. Konstanta

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ima prvič tri šestice zapored prej, na 538., 539. in 540. mestu za decimalno vejico. Števili π in e sta osnovni matematični konstanti, obe sta transcendentni števili.

Zanimiva je tudi alternirajoča vsota:

$$-2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + \ldots - 2 \cdot 665 + 2 \cdot 666 = 666.$$

Lagrange je dokazal, da lahko vsako naravno število zapišemo kot vsoto štirih kvadratnih števil. Hitro lahko na primer preverimo, da je

$$666 = 1^2 + 2^2 + 6^2 + 25^2.$$

Ni pa to edina rešitev. Če se oziramo na vrstni red sumandov, je število 666 možno zapisati na 71 načinov kot vsoto štirih kvadratnih števil. Navedimo nekaj primerov:

$$666 = 13^2 + 13^2 + 18^2 + 2^2 = 21^2 + 10^2 + 11^2 + 2^2 = 17^2 + 12^2 + 13^2 + 8^2.$$

Število 666 je deljivo s svojo številsko vsoto:

$$\frac{666}{6+6+6} = \frac{666}{18} = 37.$$

Števila 333, 444, 555 in 666 povezuje relacija:

$$333^3 + 444^3 + 555^3 = 666^3.$$

Druge zanimivosti:

$$1^6 - 2^6 + 3^6 = 1^3 - 4^3 + 9^3 = 666,$$

$$6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3 = 666,$$

$$320^2 + 410^2 + 416^2 = 666^2.$$

Za naravno število n pove Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$, koliko števil v množici $\{1, 2, \ldots, n\}$ je tujih proti n. Naravni števili sta si tuji, če je njun edini skupni delitelj enak 1. Tako imamo na primer

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4.$$

Če ima število n razcep na prafakrorje

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r},$$

potem je

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Ker je $666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37$, dobimo

$$\varphi(666) = 666\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{37}\right) = 216.$$

Iz tega sledi

$$\frac{\varphi(666)}{6+6+6} = 6+6.$$

Zanimiva je tudi enakost

$$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3.$$

Že omenjeni Michael Stifel je sestavil številski kvadrat (slika 11), v katerem so razporejena vsa naravna števila od 1 do 36 tako, da so vse vsote po vrsticah, stolpcih in diagonalah enake 111. Vsota vseh števil v njegovem kvadratu pa je seveda $T_{36} = 666$. Kvadrat s tako lastnostjo je *magični kvadrat*. Že od nekdaj je znan magični kvadrat velikosti 3×3, v katerem so vpisana vsa števila od 1 do 9, Albrecht Dürer (1471–1528), nemški slikar, grafik, umetnostni teoretik in matematik pa je na svoji grafiki *Melencolia § I* upodobil magični kvadrat velikosti 4×4, v katerem so vpisana vsa števila od 1 do 16. Znani Dürerjevi grafiki sta na primer tudi *Ritter, Tod und Teufel (Vitez, smrt in hudič)* ter *Die vier apokalyptischen Reiter (Štirje jezdeci apokalipse)*.

V magičnem kvadratu velikosti $n \times n$, v katerem so vpisana vsa števila od 1 do n^2, je vsota vseh števil enaka

$$T_{n^2} = \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

kar pomeni, da so v takem kvadratu vse vsote po vrsticah, stolpcih in diagonalah enake $n(n^2+1)/2$.

Štirje jezdeci apokalipse simbolizirajo *vojno, kugo, lakoto in smrt*. Njihovi konji so: ἵππος λευκός, ἵππος πυρρός, ἵππος μέλας in ἵππος χλωρός.

V krvi imamo *levkocite* ali *bele krvničke*. V šoli smo se o njih učili, tako v osnovni kot na gimnaziji. Vse življenje jih nosimo s seboj in zdravniki nam jih vsake toliko časa pregledajo. Beseda je skovana iz grške: λευκός, *bel*, in κύτος, *votlina, duplina, trebuh, posoda, vrč, žara, pepelnik*. Halogeni element *klor*, ki je z natrijem vezan v kuhinjski soli, je dobil ime po *rumenozeleni barvi*, grško χλωρός. Pomeni pa tudi *bled, rumenkast, svež, svetel*. Beseda *melanholija* ima izvor v grških besedah μέλας, *črn*, in χολή, *žolč*. Beseda πυρρός pomeni *rdeč, ognjene barve, rjav, žareč*. Podobna beseda je πῦρ, kar pomeni *ogenj*. Omenimo še enkrat rdečelasega epirskega *kralja Pira*

36	31	7	8	27	2
3	26	13	12	23	34
4	19	16	17	22	33
5	15	20	21	18	32
28	14	25	24	11	9
35	6	30	29	10	1

Slika 11: Stiflov magični kvadrat.

(4., 3. stoletje pne.), grško Πύρρος, ki se je pošteno lotil Rimljanov celo z bojnimi sloni, tako kot kasneje Kartažan Hanibal (3., 2. stoletje pne.). S sloni ni bilo šale, toda Rimljani so prej ali slej našli način, kako se boriti s tako trdnjavo na štirih nogah. Tako kot so dve tisočletji kasneje odkrili, kako se da boriti proti tankom.

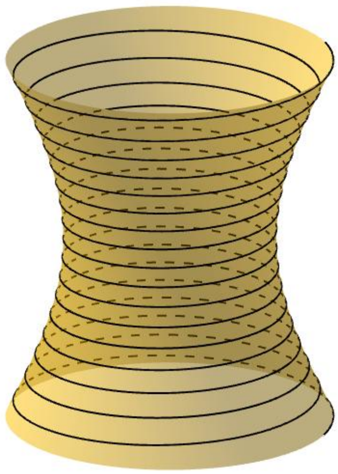
Končajmo to rekreativno matematiko z ugotovitvijo, da je zlodejevo število tudi enako vsoti kvadratov prvih sedmih praštevil:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2.$$

Za konec

Ne pozabimo! Pri Borovnici stoji ob stari progi železniška čuvajnica, dograjena leta 1857, s številko 666, zadnja pred slovitim borovniškim viaduktom, ki je tako klavrno končal.

Avtor se bralcem opravičuje za vse napake, ki jih je v svojem neznanju prizadel v pričujočem besedilu zapisanim grškim in hebrejskim besedam. Da sploh lahko pišemo grške in hebrejske besede, se moramo zahvaliti LaTeX-u. Da LaTeX to obvlada, pa je avtor spoznal takrat, ko mu je že grozil zujf in mu je že desus trkal na vrata. Tiste dni je tudi spoznal take sorte GeoGebro,



Slika 12: Vijačnica na enodelnem hiperboloidu.

ki že kar dobro obvlada tudi prostorske krivulje in ploskve. Vse v skladu s Solonovo mislijo. Slavni Solon (Σόλων), atenski zakonodajalec in eden sedmerih modrih (οἱ ἑπτὰ σοφοί), je na stara leta poudarjal:

Γηράσκω δ′ αἰεὶ πολλὰ διδασκόμενος.

Staram se, vendar še star zmeraj naprej se učim.

Končajmo z Evdemovo mislijo

Πάντα ἄρα τὰ αὐτά, ὥστε καὶ ὁ χρόνος.

Vse bo torej isto, posledično tudi čas.

Literatura in spletni viri

[1] B. Aubelj, *Antična imena po slovensko*, Modrijan, Ljubljana 1997.

[2] M. Babič, *Grška slovnica*, Filozofska fakulteta, Ljubljana 2000.

[3] F. Bradač: *Grška slovnica*, DZS, Ljubljana 1968.

[4] F. Bezlaj: *Etimološki slovar slovenskega jezika II (K–O), III (P–S)*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1982, 1995.

[5] A. Dokler, *Grško-slovenski slovar*, Knezoškofijski zavod sv. Stanislava, Ljubljana 1915.

[6] E. Mihevc Gabrovec, *Grščina: teksti in vaje za pouk klasične grščine*, Znanstvena založba Filozofske fakultete, Ljubljana 2011.

[7] C. McLarty, *The babel polutonikogreek keyboard*, 2005, spletni vir.

[8] L. Pantieri, *L'arte di scrivere in greco con LaTeX*, 2008, spletni vir.

[9] Plutarh, *Vzporedni življenjepisi I*, DZS, Ljubljana 2004.

[10] M. Snoj, *Slovenski etimološki slovar*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1997.

[11] A. Syropoulos, *Writing Greek with the greek option of the babel*, 1997, spletni vir.

[12] M. Špelič, *Grško-slovenski slovar Nove zaveze*, Svetopisemska družba Slovenije, Ljubljana 2002.