Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo
Katedra za algebro in analizo

Marko Razpet

NAPAKE ZNANIH MATEMATIKOV

Študijsko gradivo

Zgodovina matematike

Ljubljana, maj 2015

Vsebina

Predgovor

Motiti se je človeško, v zmoti vztrajati pa slaboumno. Tako pravi stari latinski pregovor, originalno *Errare humanum est, sed in errore perseverare dementis*. Tako naj bi rekel rimski modrec, državnik in dramatik Lucius Annaeus Seneca (4 pne.–65 ne.). Tudi matematiki, celo največji, se včasih zmotijo, kot bomo videli. Pogosto pa napačni sklepi matematike prisilijo, da poiščejo napako in jo popravijo. Pri tem pogosto pridejo do novih spoznanj ali celo novih teorij. Lahko bi celo rekli, da se na napakah učijo tudi matematiki.

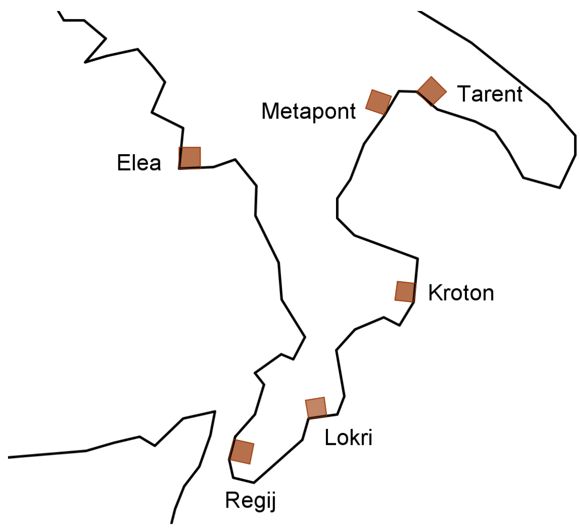
Omenjeni latinski pregovor ima tudi nekoliko drugačne oblike, večinoma pa se ujemajo v prvem delu. Motil se je Aristotel, motil se je Klavdij Ptolemaj, motil se je Galileo Galilei in še marsikdo. Prvi na primer ni dobro preštel nog žuželk, drugi je za več stoletij učvrstil geocentrični svetovni sistem, tretji je imel napačno krivuljo, krožni lok, za brahistohrono, to je krivuljo najhitrejšega spusta. Motil se je Giovanni Domenico Cassini, ki je trdil, da ima Zemlja obliko rotacijskega elipsoida, razpotegnjenega v smeri polov. Najdemo pa tudi napake, ki so nastale pri prepisovanju. Pogoste so tudi napake pri poimenovanju po napačnem človeku, napake zaradi napačnega izračuna po sicer pravilni metodi, pa še bi se kaj našlo. O napakah na drugih znanstvenih področjih pa raje ne bomo razpravljali.

V gradivu se ne bomo ukvarjali s primeri računov, v katerih je neopazno narejena nedovoljena operacija, ki jo marsikdo spregleda. S takimi na primer dokažemo, da je $1 = 2$. Primeri te vrste so namenjeni ljudem, ki osnove matematike obvladajo le na pol, takim, ki ne razumejo, da deljenje z 0 sploh ni definirano, takim, ki ne razumejo, v čem je bistvo kompleksnih števil, takim, ki ne razločujejo med aritmetičnim in algebrskim korenom. Niti ne bomo pokazali primerov napačnih računov, ki pa vseeno dajo pravilne rezultate. Pokazali bomo nekaj primerov prehitrega sklepanja iz posebnega na splošno, nekaj napak, ki so nastale zaradi napačnega aritmetičnega izračuna, pa tudi nekaj pravcatih zablod.

Ljubljana, maja 2015 — Dr. Marko Razpet

1 Pitagora

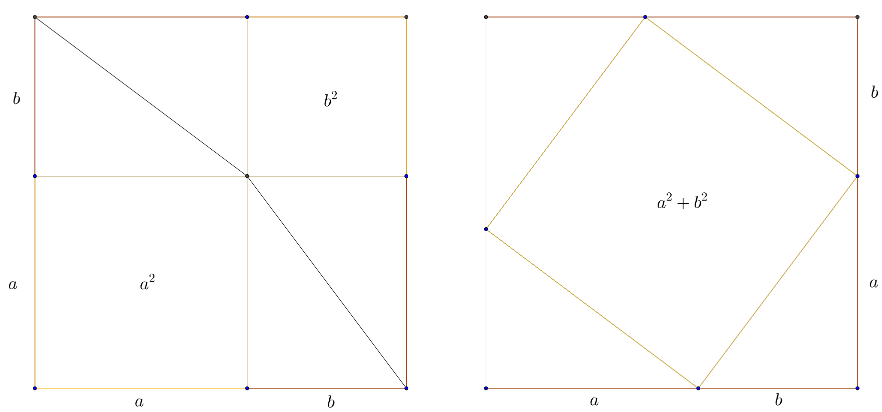
Pitagora s Samosa (570–495 pne.) – Πυθαγόρας ὁ Σάμιος, starogrški mislec in matematik, se je rodil na otoku Samos. O njem vemo toliko, kolikor so zapisali drugi po njegovi smrti. Veliko informacij o njem se je izgubilo ali pa potvorilo, tako da niso zanesljive. Na Samosu mu ni ustrezala tamkajšnja tiranija, zato se je preselil v Kroton (Κρότων) na jugu Italije. Pred tem se je morda mudil v Egiptu, prihajal v stik s Kaldejci in Feničani in spoznal njihovo znanje, tudi matematično. V Krotonu je ustanovil svojo šolo, njegovi pristaši so bili *pitagorejci*. V Krotonu so le-ti prišli v spor z drugače mislečimi, ki so jih skoraj uničili. Sam Pitagora je že pred usodnim dnem odpotoval, se mudil v Lokrih (Λοκροί) in Tarentu (Τάρας), nazadnje pa v Metapontu (Μεταπόντιον), kjer je umrl (lokacije teh mest so označene na sliki 1).



Slika 1: Južna Italija v antiki

Pitagora in pitagorejci so razvili svojo filozofijo, prehranjevalne navade in pravila obnašanja. Delovali so kot zaobljubljena bratovščina in njihovo skrivno znamenje je bil *pentagram*, peterokraka zvezda. Dobimo jo, če pravilnemu petkotniku načrtamo vseh pet diagonal (slika 3). Veliko so se ukvarjali s števili, geometrijo, astronomijo, naravoslovjem ter glasbo. Po Pitagori smo dobili *Pitagorov izrek*, ki pa je bil, morda ne za katerikoli pravokotni trikotnik, znan že stoletja prej Kitajcem, Indijcem, Babiloncem in Egipčanom. Preprost premislek o ploščinah trikotnikov in kvadratov ob sliki 2 nam potrdi veljavnost Pitagorovega izreka. Verjetno so si s takim trikom pomagali v daljni preteklosti.

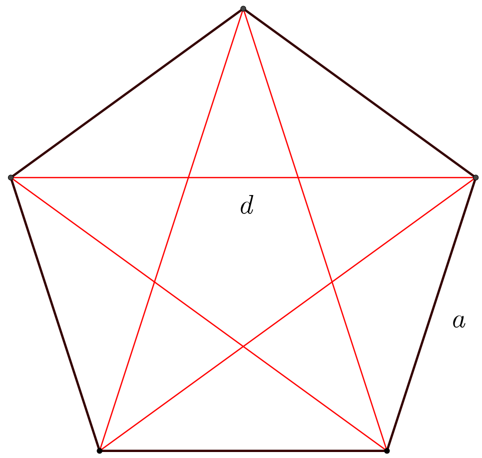
Naravna števila so delili na *soda* in *liha*. Poznali so *popolna* in *prijateljska števila*. Uvedli so pojma *kvadrat* in *kub števila*. Nekatera števila so povezovali z božanstvi. Številom do deset so pripisovali poseben pomen. Točki so priredili število 1, daljici 2, trikotniku 3 in tetraedru 4. Zato se jim je zdelo imenitno število 10, ker je $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.



Slika 2: Pitagorov izrek brez besed

Pitagorejci so med drugim tudi trdili, da je vse na tem svetu v pravilnih številskih razmerjih. Ravno ta trditev pa je sporna, kajti v njihovem simbolu, pentagramu, je razmerje dolžine črte, ki povezuje dva vrha, in razdalje med dvema sosednima vrhovoma iracionalno število. Drugače povedano: diagonala d ustreznega pentagona ni izmerljiva z njegovo stranico a. Razmerje $\tau = d/a$ ni racionalno število, ni kvocient dveh naravnih števil.

Dve diagonali, ki se sekata znotraj pentagona, skupno z nasproti ležečima stranicama, oblikujeta romb. Točka, kjer se sekata diagonali, ju deli v



Slika 3: Pentagon in pentagram

razmerju

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d}{a}.$$

Iz te relacije dobimo:

$$\tau = \frac{1}{\tau - 1}.$$

To relacijo zapišemo kot

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

Dobili smo preprosto kvadratno enačbo, ki jo znamo rešiti:

$$\tau_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Seveda upoštevamo le pozitivno rešitev, tako da je nazadnje:

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Približna vrednost je $\tau \approx 1.618033988$. Število τ je na prvi pogled iracionalno. V antičnih časih pa so že dokazovali z metodo protislovja. Ponovimo, kako so dokazali, da τ ni racionalno število.

Če namreč predpostavimo, da je τ racionalno število, potem ga lahko zapišemo kot okrajšan ulomek: $\tau = m/n$. To pomeni, da sta m in n naravni števili, ki nimata skupnih faktorjev. Njun največji skupni delitelj je $D(m,n) = 1$. Iz osnovne zveze za število τ dobimo po tej predpostavki:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}.$$

Če je $D(m,n) = 1$, je tudi $D(m+n,m) = 1$, kar hitro in z lahkoto dokažemo. Zato je tudi $(m+n)/m$ okrajšan ulomek. Če pa sta dva okrajšana ulomka enaka, se ujemata v števcih in imenovalcih, kar ni težko dokazati z osnovnim znanjem teorije števil. Zato bi dobili $n = m$ in $m + n = m$. Toda druga relacija v naravnih številih nikoli ne velja. To dokazuje, da število τ ni racionalno.

Ugotovitev ni bila prijetna za Pitagoro, ki je govoril, da je vse podvrženo lepim, celoštevilskim razmerjem. Pa še znak pitagorejcev je bil ravno pentagram, kjer nastopa, kot smo se sami prepričali, število τ. Že njegov sodobnik Hipasos iz Metaponta (574–522 pne., Ἵππασος ὁ Μεταποντῖνος), ustanovitelj pitagorejske sekte, je baje ugotovil, da τ ni racionalno število. To je bilo kot v posmeh pitagorejski teoriji celoštevilskih razmerij.

Število τ imenujemo *zlato število* oziroma *zlato razmerje*. Označujejo ga tudi s črko ϕ. Zlato razmerje τ torej nastopi v pentagramu ali pravilnem petkotniku. Ker lahko pri dani stranici a s šestilom in neoznačenim ravnilom konstruiramo diagonalo $d = a\tau$, lahko naredimo preprosto konstrukcijo pravilnega petkotnika. Zlato razmerje najdemo posledično tudi v pravilnem ikozaedru in dodekaedru.

Evklid v svojih slavnih Elementih imenuje zlato razmerje *skrajno in srednje razmerje* (ἄκρος καὶ μέσος λόγος). V obdobju evropske renesanse se je za tako razmerje pojavil izraz *divina proportione*, ki ga je med prvimi uporabljal Luca Pacioli (1445–1514), v nemščini *göttliche Proportion*, kar pomeni *božansko razmerje*. Šele Martin Ohm (1792–1872) je uvedel današnji izraz *zlato razmerje*, po nemško *der goldene Schnitt*. Martin Ohm je bil brat bolj znanega fizika Georga Ohma (1789–1854), po katerem smo dobili *Ohmov zakon* in enoto za električno upornost *ohm*, Ω.

2 Fermatova praštevila

Pierre de Fermat (1607–1665) je trdil marsikaj, kar je zaposlovalo matematike leta in leta. Med drugim je vpeljal števila

$$F_n = 2^{2^n} + 1,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Dandanes jim pravimo *Fermatova števila*. Sam Fermat je trdil, da so F_n sama praštevila, to je naravna števila, ki imajo natančno dva delitelja, sebe in 1. Če vstavimo v zgornjo formulo po vrsti $n = 0, 1, 2, 3, 4$, dobimo

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65\,537.$$

Zaporedje Fermatovih števil hitro raste. Zapisana Fermatova števila so res praštevila. A glej ga zlomka:

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Fermatovo število F_5 ni praštevilo, je sestavljeno število, kar je odkril Leonhard Euler (1707–1783). Seveda se postavi vprašanje, katera Fermatova števila so praštevila. Zaenkrat vemo le to, da so F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 praštevila, *Fermatova praštevila*. Kljub vsemu trudu niso našli večjega Fermatovega praštevila kot je $F_4 = 65\,537$.

Ugotovitev nam ne odgovori na vprašanje, koliko pravilnih n-kotnikov je konstruktibilnih, če je n liho število. Vemo, da je pravilni n-kotnik konstruktibilen natanko tedaj, ko je

$$n = 2^\mu \quad \text{ali} \quad n = 2^\nu F_{k_1} F_{k_2} \cdots F_{k_s},$$

kjer je μ naravno število, večje od 1, ν naravno število ali 0 in kjer so $F_{k_1}, F_{k_2}, \ldots, F_{k_s}$ različna Fermatova praštevila. Deloma je zgornjo trditev dokazal Carl Friedrich Gauß (1777–1855), dokončno pa Pierre Laurent Wantzel (1814–1848). Slednji je tudi dokazal, da antična problema podvojitve kocke in trisekcije kota nista rešljiva s šestilom in neoznačenim ravnilom. Gauß je tudi konstruiral pravilni 17-kotnik. To je bil po dolgih stoletjih precejšnji uspeh v geometriji, kajti natančno so do takrat znali konstruirati le enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni petkotnik ter tiste, ki se dajo konstruirati s pomočjo le-teh, in one, ki se dajo dobiti iz konstruktibilnih z razpolavljanjem stranic, na primer pravilni desetkotnik, dvajtestkotnik itd.

Zagotovo je konstruktibilnih

$$\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 27$$

pravilnih večkotnikov z liho mnogo stranicami. Tedaj je namreč $\nu = 0$, izmed 5 znanih Fermatovih praštevil pa lahko sestavimo produkt s k različnimi faktorji ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) na $\binom{5}{k}$ načinov. Iz teh večkotnikov lahko s postopnim razpolavljanjem stranic konstruiramo nešteto pravilnih večkotnikov s sodim številom stranic, toda ne vseh. Pravilni 36-kotnik ni konstruktibilen, ker je $36 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3$, kar ni produkt potence števila 2 in različnih Fermatovih praštevil.

Konstruktibilen je na primer pravilni 65-kotnik, ker je $65 = 5 \cdot 17$ in faktorja 5 ter 17 sta Fermatovi praštevili. Pravilnemu n-kotniku lahko očrtamo krog, stranice n-kotnika pa so v tem krogu tetive, ki jim ustreza središčni kot $2\pi/n$. Če znamo konstruirati ta kot, znamo tudi pravilni n-kotnik. Ker znamo kote seštevati in odštevati, lahko središčni kot za pravilni 65-kotnik izrazimo s središčnima kotoma za pravilni 5-kotnik in pravilni 17-kotnik v obliki:

$$\frac{2\pi}{65} = x\frac{2\pi}{5} + y\frac{2\pi}{17}.$$

Pri tem sta x in y celi števili. Iz zgornje relacije dobimo po krajšanju in preureditvi linearno diofantsko enačbo

$$17x + 5y = 1.$$

Njena splošna rešitev je

$$(x, y) = (5u - 2, 7 - 17u),$$

kjer je u poljubno celo število. Ena od rešitev je $(x, y) = (-2, 7)$. Od sedemkratnika kota $2\pi/17$, ki ga imamo v pravilnem 17-kotniku, odštejemo dvakrat kot $2\pi/5$, ki ga imamo v pravilnem petkotniku, pa dobimo središčni kot, ki ustreza pravilnemu 65-kotniku.

Enačba $f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ je *diofantska enačba*, če je $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ polinom s celimi koeficienti v spremenljivkah $x_1, x_2, \ldots, x_r$, rešitve pa so celoštevilske r-terice $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Diofantska enačba je dobila ime po aleksandrijskem matematiku Diofantu (200-284), grško Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς. Diofantska je tudi enačba $x^2 + y^2 = z^2$, katere rešitve (x, y, z) v naravnih številih imenujemo *pitagorejske trojice*. Prav tako *Pellova enačba* $x^2 - Dy^2 = 1$, v kateri D ni kvadrat kakšnega naravnega števila.

3 Fermatov poslednji izrek

Pierre de Fermat je postavil domnevo, da enačba (Fermatova enačba, poseben primer diofantske enačbe)

$$x^n + y^n = z^n$$

za naravna števila n, ki so večja kot 2, nima netrivialnih celoštevilskih rešitev. To je vsebina Fermatovega *velikega*, tudi *zadnjega* ali *poslednjega izreka*. Trivialne rešitve so na primer $(x, y, z) = (0, 1, 1), (2, 0, 2)$. Te niso zanimive. Za $n = 1$ je rešitev, kolikor hočete. Tedaj je Fermatova enačba $x + y = z$. Njenih rešitev je nešteto, na primer $(x, y, z) = (1, 1, 2), (1, 2, 3)$. Za $n = 2$ je Fermatova enačba $x^2 + y^2 = z^2$, ki ima prav tako nešteto rešitev, na primer $(x, y, z) = (3, 4, 5), (5, 12, 13)$. Do svojega poslednjega izreka je Fermat prišel pri študiju Diofantovega dela Arithmetica. Na mestu, kjer Diofant govori o zapisu kvadrata racionalnega števila kot o vsoti kvadratov dveh racionalnih števil, je Fermat na rob knjige zapisal:

> Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Profesor I. Vidav ima v [6] za zgornje besede naslednji prevod:

Ni pa mogoče razstaviti kuba na vsoto dveh kubov ali bikvadrata na vsoto dveh bikvadratov. Sploh ni mogoče razstaviti nobene potence, večje od kvadrata, v vsoto dveh potenc iste stopnje. Za to sem našel zares čudovit dokaz. Zaradi pomanjkanja prostora pa ga ne morem tu zapisati.

Nihče ne ve, ali je Fermat res imel pravi dokaz za zvoj poslednji izrek. Lahko da ga je imel za $n = 3$ in $n = 4$, lahko da ga je imel za vsak n, kar je pa malo verjetno. Fermat je zapisal: *Hanc marginis exiguitas non caperet.* Najbrž bi mu nič ne koristilo, če bi imel na razpolago *širši rob* v knjigi. Vemo le to, da je Fermat s tem dal veliko dela matematikom za kakih 350 let. Morda pa bi bilo koristno, če bi založbe v matematičnih knjigah dopuščale *širši rob* za vsak primer.

Matematiki, poklicni in amaterski, so se zapodili v dokazovanje poslednjega Fermatovega izreka. Za nekatere majhne n je še šlo, na splošno pa ne. Delale so se večje in manjše napake. Izrek je namreč lahko umljiv vsem, ki poznajo osnove matematike in Pitagorov izrek. Problem je tudi v tem, da v teoriji števil z uganjevanjem ne pridemo daleč. Kdo pa ve, če na primer enačba $x^{67}+y^{67} = z^{67}$ nima za rešitev kakšnih ogromnih števil, kot na primer Pellova enačba $x^2 - 109y^2 = 1$? Ta ima najmanjšo rešitev

$$(x, y) = (158\,070\,671\,986\,249, 15\,140\,424\,455\,100).$$

Pri dokazovanju poslednjega Fermatovega izreka so se motili vse vprek, tu pa tam pa je kdo le izboljšal dokaz, nastajale so nove ideje in teorije, na primer teorija celih algebraičnih števil in teorija idealov. Euler je leta 1770 potrdil Fermatovo domnevo za $n = 3$, vendar je pustil neko vrzel v dokazu, ki pa ni bistvena. Adrien-Marie Legendre (1752–1833) in Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) sta se lotila primera $n = 5$ okoli leta 1825, Gabriel Léon Jean Baptiste Lamé (1795–1870) pa primera $n = 7$ leta 1839. V resnici je dovolj dokazati Fermatov poslednji izrek za praštevilske eksponente n. Kljub temu so ga nekateri posebej dokazovali za $n = 6, 10, 14$. Še najdlje je v začetku 19. stoletja prišla Marie-Sophie Germain (1776–1831).

Zelo daleč je malo kasneje prišel v dokazovanju Ernst Eduard Kummer (1810–1893). Dokazal ga je za vsa tako imenovana *regularna praštevila*. Za preostala praštevila, ki jih je nešteto, pa je menil, da naj se dokaz dela posebej.

Bila je razpisana celo nagrada za tistega, ki bi dokazal izrek v vsej splošnosti. Paul Friedrich Wolfskehl (1856–1906) je leta 1905 v oporoki zapustil akademiji znanosti v Göttingenu 100.000 zlatih mark za nagrado tistemu, ki bo prvi dokazal Fermatov poslednji izrek. Neki recenzent, ki je zbiral rešitve, ki jih ni bilo malo, je imel že pripravljen listek, na katerem je pisalo: "Na strani ... v vrstici ... je napaka." Listek je samo izpolnil in ga poslal nazaj pošiljatelju.

Tudi Josip Plemelj (1873–1967), svetovno znani slovenski matematik, prvi rektor ljubljanske univerze, se je spopadel s Fermatovim poslednjim izrekom. Dal je krajši dokaz za $n = 5$ kot predhodniki. Pripovedoval je, da je že pričel pisati članek s splošno rešitvijo za objavo, pa je odkril napako in v jezi vrgel vse skupaj v koš in sam pri sebi sklenil, da se s Fermatovim izrekom ne bo več ubadal. Tako počnejo mnogi matematiki, če jim kaj ne gre. Začno se ukvarjati s čim drugim. Plemlju je bilo kasneje žal, da je tako pometel s Fermatom, češ da nekaj je pa le bilo narejenega pri njegovem dokazovanju.

Minevala so leta, dokler je na koncu 20. stoletja le bil narejen velik preboj v dokazovanju poslednjega Fermatovega izreka. Pri tem so ključno vlogo odigrale eliptične krivulje. Andrew John Wiles, rojen 1953, je leta 1993 Fermatov izrek dokazal na neki matematični konferenci, toda odkril je napako. Trajalo je še eno leto, v katerem je napako odpravil in leta 1995 je bil dokaz objavljen v matematični reviji Annals of Mathematics. V dokazu do takrat, pa tudi kasneje napak niso našli. Sledile so časti, med drugim tudi Wolfskehlova nagrada leta 1997, ki pa je zaradi vojn in inflacije znašala le še 75.000 nemških mark. Deset let kasneje bi se ta nagrada iztekla. Ni pa Wiles mogel dobiti najprestižnejše nagrade v matematiki, Fieldsove medalje, ker je že leta 1993 dosegel starost 40 let. Podeljujejo jo od leta 1936 na vsake štiri leta na mednarodnih matematičnih kongresih dvema ali največ štirim uspešnim matematikom, ki še niso dosegli starosti 40 let.

Profesor Plemelj je v šali tudi pripovedoval, kako je nekdo "dokazal" poslednji Fermatov izrek. Takole je sklepal. Če je Fermatova enačba $x^n +$

$y^n = z^n$ rešljiva za $n > 3$, potem je rešljiva tudi enačba, ki jo dobimo z odvajanjem in krajšanjem, to se pravi $x^{n-1} + y^{n-1} = z^{n-1}$. Če tako nadaljujemo, pridemo prej ali slej do enačbe $x^3 + y^3 = z^3$. Za to pa je že Euler dokazal, da ni rešljiva. Tako smo prišli v protislovje in enačba $x^n + y^n = z^n$ je zato nerešljiva.

4 Evklidov in Cantorjev greh

Evklid (Εὐκλείδης, 3. stoletje pne.) je v Elementih (Στοιχεῖα) najprej postavil nekaj definicij, na primer točke in črte:

α′. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β′. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

To dobesedno pomeni:

1. Točka je tisto, kar nima delov.
2. Črta je dolžina brez širine.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor je v matematiko vpeljal teorijo množic. V svojem temeljnem članku [1] je zapisal:

> *Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

To pomeni v prostem prevodu:

Pod 'množica' razumemo vsak skupek M določenih, različnih objektov m našega nazornega ali miselnega sveta (ki jih imenujemo 'elementi') kot celoto.

Kaj je pravzaprav tu spornega? Za učence prvega razreda osnovne šole morda nič. Ko pa se poglobimo s skromnim znanjem logike v Cantorjevo definicijo množice, pa spoznamo, da nosi v sebi kal protislovja, ki pa ga v matematiki ne sme biti, sicer bi lahko dokazali karkoli. Cantorjeva definicija množice namreč vodi v paradoks iste sorte kot *paradoks lažnivca*, ki je bil znan že v antičnih časih. Apostol Pavel piše v Pismu Titu (1:12):

Εἶπέν τις ἐξ αὐτῶν, ἴδιος αὐτῶν προφήτης· Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται, κακὰ ϑηρία, γαστέρες ἀργαί.

Eden od njih, njihov lastni prerok, je rekel: "Krečani so večni lažnivci, hude zveri, leni trebuhi."

Poenostavimo. Denimo, da Krečan reče: "Vsi Krečani vedno lažejo." Kaj je s tem Krečanom? Laže ali govori resnico? Če govori resnico, je res, kar je rekel, torej laže. Če pa laže, se je zlagal, ko je izrekel zgornji stavek. Torej govori resnico. Ta Krečan obenem laže in govori resnico. To pa je paradoks.

Po Cantorjevi definiciji množice bi lahko sestavili tudi množico vseh množic. V njej bi bile množice, ki imajo sebe za element, in množice, ki nimajo sebe za element. Sestavimo množico M tistih množic, ki nimajo sebe za element. Kam spada M? Če je M v M, potem nima sebe za element. Čudno! Če M ni v M, potem je M v M. Torej M je v M in hkrati M ni v M. To je paradoks, ki je zamajal Cantorjevo teorijo množic. Še dobro, da se jo je dalo samo z dodatkom enega aksioma rešiti. Prepovedati je bilo treba množico vseh množic, ker je to logično protisloven pojem. Sčasoma so matematiki le prišli do spoznanja, da v matematiki niso pomembne stvari kot take, ampak njihove lastnosti in odnosi med njimi. V geometriji ni važno, kaj je točka, kaj premica, važne so lastnosti točk in premic ter odnosi med njimi. Osnovni pojmi v matematični teoriji morajo ostati nedefinirani. Evklidov in Cantorjev greh je ravno v tem, da sta definirala osnovne pojme v geometriji oziroma v teoriji množic. Vsaka teorija ima sistem primernih aksiomov in definicij, s katerimi z logiko dokazujemo razne trditve.

5 Krožna konstanta

Razmerje med obsegom in premerom kroga, ki ga že dolgo označujemo s π, ter ploščino kroga so poskušali izračunati Kitajci, Indijci, Babilonci, Egipčani, Grki ter drugi. Za π so našli bolj ali manj dobre približke, ki so nekoliko večji od 3. Arhimed iz Sirakuz na Siciliji (287–212 pne., Ἀρχιμήδης ὁ Συρακόσιος se je sistematično lotil dela in našel znani približek $\pi \approx 22/7$. Ugotovil je, da isti π nastopa tudi v izrazu za ploščino kroga. Arhimed je krogu včrtal in očrtal pravilni večkotnik z velikim številom stranic, tako da sta obsega obeh približka za obseg kroga. Obsega je delil s premerom kroga in dobil spodnji in zgornji približek za π. To *arhimedsko metodo* so uporabljali še dolgo časa. Isaac Newton (1643–1727) je menda prvi poskusil izračunati število π z uporabo številskih vrst.

Madhava iz Sangamagrame (1340–1425, संगमग्राम के माधव) velja za prvega, ki se je ukvarjal z neskončnimi vrstami, ki so drugačne kot geometrijske, prav posebej s potenčnimi vrstami za arkus tangens, sinus in kosinus, ki sta jih v Evropi ponovno odkrila James Gregory (1638–1675) in Isaac Newton (1643–1727) 250 let kasneje. Indijcu Madhavi, ki je vrsti našel okoli leta 1400, je uspelo izračunati približek števila π na 11 pravilnih decimalk in tabele za funkcijo sinus. Madhava ni, tako kot še marsikdo, zapustil nobenega matematičnega besedila, le nekaj astronomskih. Njegova odkritja sta kasneje obdelala matematika in astronoma *Nilakantha Somajadži* (1444–1544, नीलकण्ठ सोमयाजि) in *Džjesthadeva* (1500–1575), ज्येष्ठदेव).

Ko sta se teorija vrst in trigonometrija dobro uveljavili v matematiki, so poskusili z izračuni števila π s potenčno vrsto za $\arctan x$ in dobili lepe rezultate. Abraham Sharp (1653–1742) je v znano potenčno vrsto za $\arctan x$ vstavil $x = \sqrt{3}/3$, dobil po poenostavitvi vrsto

$$\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

in uspel leta 1699 najti 71 točnih decimalk števila π. Tako kot vsi, ki so π računali z vrstami, je izračunal člene vrste na nekoliko več točnih decimalk, kot je potrebno za želeno natančnost končnega rezultata. Več decimalk pa je treba upoštevati, ker je njihov niz treba prekiniti, s čimer pa naredimo napako. Te napake pa ne smejo vplivati preveč na levo v decimalnem zapisu. Verjetno je Sharp potem seštel posebej pozitivne, nato negativne člene vrste. Obe vsoti je nato odštel in razliko pomnožil z nerodnim faktorjem $\sqrt{3}$, ki ga je moral tudi izračunati na veliko število decimalk. V vsakem primeru je bil to velik napredek v računanju števila π.

Na srečo pa imajo trigonometrične funkcije adicijske izreke s svojimi posledicami, s katerimi dosežemo mnogo hitrejšo konvergenco. Ena takih je *Machinova formula*

$$\pi = 4\left(4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}\right),$$

poimenovana po Johnu Machinu (1680–1751), ki je v zgornji formuli vsak člen posebej razvil v vrsti, seštel dovolj členov in izračunal število π na 100 pravilnih decimalk. Pri tem je očitno potekal ves račun samo z racionalnimi števili, zapisanimi v decimalni obliki na nekoliko več kot 100 decimalk. William Jones (1675–1749) je leta 1706 v delu *Synopsis Palmariorum Matheseos* opisal Machinov uspeh z vsemi stotimi decimalkami števila π, avtorja zelo pohvalil glede natančnosti in predlagal, da se krožno konstanto označi s π, ker je to prva črka grške besede περιφέρεια, kar pomeni obod, krog. To besedo uporablja tudi Evklid v svojih Elementih. Formulam, v katerih je lahko tudi več členov z arctan racionalnega števila, pravimo *formule Machinovega tipa*.

Thomas Fantet de Lagny (1660–1734) je bil še bolj vztrajen, kajti z isto vrsto kot Sharp je leta 1719 izračunal število π na 127 decimalk in rezultat je bil dve leti kasneje tudi objavljen. Prvih 112 De Lagnyjevih decimalk je točnih, 113. decimalka pa je napačna (namesto 8 je je zapisano 7), naslednje, od 114. do 127. pa so spet pravilne. Verjetno gre pri nesrečni 113. decimalki le za napako pri prepisovanju ali stavljenju v tiskarni. Kot kaže, pa se dolgo časa z računanjem števila π nihče ni več resno ukvarjal in kot najboljši dotakratni rezultat so po matematičnih besedilih navajali kar objavljeni De Lagnyjev približek z napako na 113. decimalki vred.

Leonhard Euler (1707–1783) je pri vsem svojem ogromnem delu razvil tudi nekaj formul Machinovega tipa za izračun števila π. Sam z računanjem krožne konstante ni izgubljal dragocenega časa, izračunal je na hitro le 20 njenih decimalk leta 1755. S svojim velikim vplivom pa je dosegel, da se jo še danes označuje s π, kar je prvi predlagal prej omenjeni Jones.

Baron Jurij Vega (1754–1802) je uporabljal formule Machinovega tipa in leta 1789 poslal akademiji znanosti v Sankt Petersburg svoj izračun števila π na 143 decimalk z opisom postopka vred. Verjetno si je Vega s tem delom želel postati član ruske akademije. Bil je popolnoma prepričan, da je njegovih 140 decimalk točnih, v resnici pa jih je bilo točnih samo 126. Vega se je namreč zmotil pri zadnjih decimalkah v nekaj členih vrste, napake pa so imele vpliv vse do 127. decimalke v končnem rezultatu. Podrobna analiza je pokazala, da bi bilo vseh 140 decimalk pravilnih, če omenjenih napak v nekaj členih vrste ne bi bilo. Je pa Vega odkril, da je 113. De Lagnyjeva decimalka 8, ne pa 7. Ruska akademija je z objavo zakasnila: namesto leta 1791 je luč sveta Vegov π v Rusiji ugledal šele leta 1795. Toda Vega je najbrž sam ugotovil napako in leta 1794 v dodatku k svoji *Popolni zakladnici logaritmov* objavil število π na 140 decimalk, od katerih pa so zadnje 4 spet napačne. To pa zato, ker je manjšo napako prenesel iz računa, ki ga je poslal akademiji. Če te napake ne bi ponovil, bi bilo vseh 140 decimalk pravilnih. Isti rezultat so ponatisnili še 15 let po Vegovi smrti v njegovem učbeniku. Ker boljšega rezultata tisti čas ni bilo, nihče pravzaprav ni vedel, katere decimalke od 126. naprej so pravilne. S tem v nobenem primeru ne želimo omadeževati Vegovega veličastnega dela, toda tako pač je.

Leta 1822 je Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832), profesor matematike v Göttingenu, v svojem učbeniku objavil 157 decimalk števila π. Na tamkajšnji univerzi je takrat deloval tudi Carl Friedrich Gauß (1777–1855), najboljši takratni matematik sploh. Pravijo, da Gauß ni nič kaj rad predaval, kajti Thibaut ga je kot dober predavatelj popolnoma zasenčil. Od kod sedaj Thibautu število π na toliko decimalk?

Če pa pozorno pogledamo v njegov učbenik, opazimo napako že na 10. decimalki: namesto 5 piše 9. Naslednja napaka je na 108. decimalki: namesto 6 stoji 3. Potem sledijo pravilne decimalke vse do 127. Sledita popolnoma napačni decimalki 4 in 6, za katerima pa je 6 pravilnih decimalk, samo da so za dve mesti pomaknjene v desno. Sledi decimalka 1, ki je napačna, nato pa kar 19 pravilnih decimalk, ki so za tri mesta pomaknjene v desno. Zadnji dve, 156. in 157. pa sta napačni. Verjetno so napake nastale pri prepisovanju ali stavljenju v tiskarni, kajti v naslednji izdaji učbenika leta 1831 sta popravljeni 10. in 108. decimalka, izpuščene so vrinjene decimalke 4, 6 ter 1 in tako natiskano število π je popolnoma pravilno na 152 decimalk. Napačni sta le zadnji dve, 0 in 2, kar se lepo vidi v tabeli 1, v kateri je zapisanih nekaj decimalk od vključno 126. naprej.

	130 140 150
prav	46095505822317253594081284811174...
L 1719	46
V 1789	4~~47672138611733138~~
V 1794	46095505822~~6136~~
T 1822	46~~460955051822317253594081284802~~
T 1831	46095505822317253594081284 8~~02~~
R 1841	460955058223172535940812848~~47378~~...
D 1844	46095505822317253594081284811174...

Tabela 1. Zadnje decimalke objavljenih približkov števila π.

V tabeli 1 kratica in letnica pomenita, kdo in kdaj je približek števila π objavil oziroma poslal v objavo: L — De Lagny, V — Vega, T — Thibaut, R — Rutherford, D — Dase. Prečrtane števke so napačne, podčrtane pa odveč. Thibaut je sicer opisal postopek za izračun, ni pa navedel, od kod mu 154 decimalk, od tega kar 152 pravilnih.

Leta 1841 je William Rutherford (1798–1871) objavil 208 decimalk števila π, ki ga je izračunal po neki formuli Machinovega tipa. Opisal je postopek in zapisal, da se njegov izračun zagotovo ujema na 152 decimalk z izračunom na rokopisu, ki leži v neki knjižnici v Oxfordu. Žal je bilo kljub vsemu Rutherfordovemu trudu samo teh 152 decimalk točnih, vse nadaljnje pa napačne, o čemer Rutherford ni mogel vedeti, ker boljšega rezultata ni bilo. Na vprašanje, ki ga mu je nekdo zastavil leta 1842 glede rokopisa v Oxfordu, je odgovoril, da ga sicer sam ni videl, da pa o njegovem obstoju ne dvomi, češ da je naveden z vsemi do takrat znanimi decimalkami v *Penny Cyclopaedia, Vol. XIX* iz leta 1841. Pod geslom *Quadrature of the circle* je res opisana vsa problematika v zvezi z obsegom in ploščino kroga ter seveda z računanjem števila π. Med drugimi je omenjen tudi Vega in njegovih 140 decimalk. Pomemben pa je zapis, da je grof Franz Xaver Zach (1754–1832), priznani astronom, informiral Montucla o oxfordskem rokopisu. Francoz Jean-Étienne

Montucla (1725–1799) je bil uveljavljeni zgodovinar matematike. Če je to res, je nekdo izračunal število π na 152 točnih decimalk že pred letom 1800. Očitno pa so ga prepisovali in pošiljali naokoli. Verjetno ga je tako dobil tudi Thibaut. Ostaja pa popolna skrivnost, kdo je avtor omenjenega rokopisa. B. Wardhaugh, delujoč v Oxfordu, se je leta 2014 zakopal v omenjeni rokopis in v [8] ugotovil, da je nastajal več let in da je π izračunal nekdo okoli leta 1740 v Philadelphiji v Pensilvaniji. Novejše uradne kronologije števila π v oxfordskem rokopisu redkokdaj omenjajo.

Leta 1844 je Johann Martin Zacharias Dase (1824–1861) izračunal 200 točnih decimalk števila π po neki drugi formuli Machinovega tipa. Formulo je izpeljal Leopold Karl Schulz von Straßnitzki (1803–1852). Rezultat je bil objavljen v nemški reviji *Crelles Journal*, kar je popularno ime za *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ki izhaja še danes, ustanovil pa jo je leta 1826 matematik August Leopold Crelle (1780–1855).

Straßnitzki takoj za petimi vrsticami decimalk števila π predstavi Daseja iz Hamburga kot nadpovprečnega računarja, sposobnega računanja na pamet z dolgimi večmestnimi števili. Dase se je preživljal s tem, da je po gostilnah za denar na pamet računal s takimi števili. Ravno zaradi izjemne sposobnosti je Straßnitzki najel Daseja kot nekakšno živo računalo, da mu je izračunal krožno konstanto na 200 decimalk, in to v dveh mesecih. Mimogrede omeni tudi dokument v oxfordski knjižnici in ujemanje Dasejevega izračuna na prvih 152 decimalkah. Prosil je celo oblasti, da bi mlademu Daseju pomagale najti primerno službo. Žal je Dase prej umrl, preden je dobil stalno zaposlitev.

Straßnitzki, rojen v Krakovu, je študiral matematiko, fiziko in še nekatere druge vede na Dunaju. Med letoma 1827 in 1834 je predaval matematiko na ljubljanskem liceju in našega Franca Močnika (1814–1892), matematičnega pedagoga in pisca matematičnih učbenikov, navdušil za študij matematike. V Ljubljani je Straßnitzki imel več javnih predavanj iz višje matematike in astronomije. Iz Ljubljane je odpotoval v Lvov, kjer je leta 1834 doktoriral in postal univerzitetni profesor. Nazadnje pa se je ustalil na Dunaju, kjer je razmeroma mlad umrl.

Za konec omenimo, da je Rutherford še enkrat stisnil zobe in število π

leta 1853 izračunal na 440 točnih decimalk. Takrat je bilo drugače: primerjal se je lahko z Williamom Shanksom (1812–1882), ki je istega leta izračunal 527 točnih decimalk. Shanks je π računal celih 15 let na 707 decimalk in svoj približek leta 1874 tudi objavil. Francozi so ga nekaj let pred začetkom druge svetovne vojne z velikimi števkami krožno zapisali v Palais de la Découverte, muzeju znanosti, v Parizu. Augustus de Morgan (1806–1871) je prešteval pogostost decimalnih števk števila π. Predvideval je, da se morajo enakomerno pojavljati. Ugotovil je, da se v Shanksovem rezultatu 7 po 500. decimalki pojavlja redkeje kot ostale števke. Ugotovili so, da se je Shanks zmotil na 528. decimalki. Tudi naslednje niso pravilne. To je potrdil Daniel F. Ferguson (kljub njegovemu trudu se ni nihče spomnil, da bi na spletu obelodanil njegovo biografijo), ki je π izračunal z mehanskim namiznim računalom na 620 decimalk. Zato so morali Francozi v Palais de la Découverte popraviti decimalke. To so naredili kmalu po koncu druge svetovne vojne. Po tem so π računali samo še z elektronskimi računalniki.

6 Vegovi logaritmi

Baron Jurij Vega (1754–1802) je leta 1794 izdal veliki logaritmovnik *Thesaurus Logarithmorum Completus*, tudi *Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischen Tafeln*. V njem je tudi objavil postopek za izračun števila π in samo število π na 140 decimalk, od katerih so zadnje štiri žal napačne. Vega je obljubil tudi nagrado tistemu, ki bo prvi odkril kakšno napako. Zapisal je v latinščini in nemščini[1]:

> Vix est probabile, ullum sphalma hoc in opere tanta diligentia, priusquam publici fieret juris, examinato correctoque posse reperiri. Si tamen mendosi quid ei insit, quo id certius detegatur, spondeo idem, quod jam olim in priore editione tabularum mearum logarithmico–trigonometricarum (Vindobonae 1783), primitiis laborum meorum hujus generis perquam ingratorum, spopondi, *me pro singulis sphalmatibus computationem turbantibus*

[1] V Thesaurusu je uporabljen starinski 'dolgi s', ki ga tukaj nadomešča navaden 's'.

> *ei, qui mihi primus illa indicaverit, ducatem monetae imperialis daturum, sphalmataque sic detecta occasione data promulgaturum esse*, ut, si forte hic thesaurus ab erroribus non sit prorsus immunis, tabulae logarithmicae, quibus tuto fidas, tandem aliquando obtineantur.
>
> Scripsi apud exercitum caes. reg. ad Rhenum superiorem Calend. Octobr. 1794.
>
> G. VEGA.

Še v nemščini, kakršno so uporabljali v Vegovem času:

> Es ist zwar gar nicht wahrscheinlich, dennoch aber wohl möglich, dass bey der Herausgabe dieses Werkes irgend eine fehlerhafte Stelle sey übersehen worden. Um solche ausfindig zu machen, verpflichte ich mich hiermit, – eben so wie bey der ersten Auflage meiner logarithmisch–trigonometrischen Tafeln (Wien 1783), meinem ersten Versuche solcher undankbaren Beschäftigungen – *für jede erste an mich zu machende Anzeige eines jeden übersehenen Fehlers, der zu falschen Rechnungen Anlass geben kann, einen kayserl. Dukaten zu bezahlen, und sodann die angezeigten fehlerhaften Stellen bey einer schicklichen Gelegenheit öffentlich bekannt zu machen*, damit man doch auf diese Art vollkommen fehlerfreye logarithmische Tafeln erhalte, falls dieses Werk ja noch einige fehlerhafte Stellen enthalten sollte.
>
> Geschrieben bey der kayserl. königl. Armee am obern Rheine am 1sten Oktober 1794.
>
> G. VEGA.

To bi prevedli nekako takole:

Ni sicer verjetno, toda kljub vsemu je mogoče, da je pri izdaji tega dela bila prezrta kakšna napaka. Da bi jo izsledili, se s tem obvezujem, ravno tako kot pri prvi nakladi mojih logaritemsko–trigonometričnih tablic (Dunaj 1783), ki so moj prvi poskus takšnega nehvaležnega opravila, *za vsako prvo meni naznanjeno prezrto napako, ki bi ob priliki dala napačen izračun, plačati* *en cesarski dukat, in jo potem razglasiti ob primerni priložnosti*, da bi tako vendar prišli do logaritemskih tablic, ki bi bile brez napak, če ima to delo morda le nekaj napak.

Napisano v cesarsko–kraljevi armadi on zgornjem Renu, 1. oktobra 1794.

J. VEGA.

V [2] (Astronomische Nachrichten, Astronomska poročila) se je Gauß zelo privoščil Vego na račun njegovih logaritmov in nagrade tistemu, ki prvi odkrije kakšno napako. Omenja celo kralja Širama, ki je obljubil velikansko nagrado izumitelju šahovske igre. Takole piše (prevod M. R.):

> Vegova Popolna zakladnica logaritmov[2] je, kakor je znano, večinoma nov natis večjih Vlacqovih[3] logaritemskih tablic. V predgovoru Vega navaja, da obstaja v originalu znatno število napak, ki jih je odpravil, in dodaja, da je razen te popravil na zadnjih števkah[4] logaritmov še zelo veliko nepravilnosti, ki so po velikosti ena, dve, tri, pa tudi štiri enote. Z enako skrbnostjo naj bi bile tudi na novo pridružene tabele (namreč tiste, ki vsebujejo logaritme trigonometričnih funkcij za prvi dve stopinji za vsako sekundo posebej) preverjene in popravljene. Vega se sedaj domišlja, da so njegove tabele skoraj brez napak, in obljublja, sklicujoč se na popolno[5] brezhibnost tabel, prvemu, ki bi našel kakšno napako, ki bi lahko še obstajala in je nastala zaradi napačnega izračuna (pro sphalmatibus calculum turbantibus[6]), plačilo v znesku enega dukata[7]. Če je ta dne 1. oktobra 1794 razpisana nagrada kadarkoli imela posledice, mi ni znano.

[2]Thesaurus Logarithmorum Completus (lat.), Vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischen Tafeln (nem.) (op. prev.).

[3]Vega piše *Vlack, Vlaccus* (op. prev.).

[4]Gauß nedosledno uporablja izraze *decimalka, števka, mesto* (op. prev.).

[5]Gauß podčrtano besedo in še nekatere piše v razprtem tisku (op. prev.)

[6]Po pomotah, ki so skalile (zmedle) računanje. Zaradi manjših napak, ki so negativno vplivale na celotni račun (op. prev.).

[7]Zlatnik, cekin, ki je bil v rabi v več evropskih deželah do prve svetovne vojne. Težak je bil 3,5 g, v njem je bilo 98,6% zlata (op. prev.).

Dvomim, če je Vegi čisto jasno, katere vrste možnih napak zaradi napačnega izračuna naj se gleda. Za vse tabele, ki so namenjene predstavitvi teoretično dognanim iracionalnim količinam, velja, kakor je znano, osnovno pravilo, po katerem so tablične količine pravim vrednostim vselej tako blizu, kot je pri izbranem številu decimalnih mest možno, in da potemtakem odstopanje nikoli ne sme biti večje kot polovica enote na zadnji decimalki. Vsak prekršek proti tej hudi normi je napaka, ki lahko zavede do nepravilnega rezultata tudi računarja, ki se zanaša na ujemanje. Če nekdo opušča to strogo pravilo in daje prednost pomembnosti pred nepravilnostjo v svoji presoji, potem zaide odločanje na področje samovolje. Čeprav je bilo že omenjeno, da sam Vega govori v zvezi z Vlacqovimi tablicami o popravkih, ki so velike le za enoto na zadnjem mestu, in si za cilj zadaja popolno brezhibnost, pa vsekakor kaže namigniti na to, da je imel v mislih strogo pravilo. S številnimi slučajnimi primerjavami z večmestnimi rezultati sem tudi ugotovil, da je prvi del Thesaurusa, ki vsebuje logaritme zaporednih naravnih števil, vedno zelo korekten.

Od tistega časa je bilo glede pravilnosti izpopolnjenih več drugih logaritemskih tablic in prihajalo je do podobnih ponudb nagrad za prve prijavitelje napačnih števil; vendar ne vem, če je bilo pri tem kaj uspeha razen pri Köhlerjevem logaritemsko–trigonometričnem priročniku, izdanem pri Tauchnitzu v Leipzigu leta 1847. Založnik teh tablic je pri prvi izdaji obljubil plačilo za prvo, v postavljenem roku prispelo prijavo posamezne napake, ki povzroča napačne rezultate, po en lujdor[8], in po nekem natiskanem poročilu z datumom 1. julij 1848 je bila zares izplačana nagrada za štiri prijavljene napake. Kar si sedaj pri tem zasluži spoštovana omemba, je neprijetna okoliščina, da eno od teh napak lahko okvalificiramo le s priznavanjem zgornjega strogega pravila.

[8]Francoski zlatnik, Louis d'or, težak 6,7 g; v njem je bilo 91,6 % zlata (op. prev.).

Namreč logaritem števila 103 000, ki je na 12 mest[9] natančno

$$= 5,012837224705,$$

je v prvem natisu določen z 8 števkami

$$= 5,01283723,$$

medtem ko je po pravilu zaokroženo[10] število 5, 01283722. Želimo si, da bi v prihodnje bila ta odločitev upoštevana v drugih takih in podobnih primerih.

Če bi se Vega seznanil z istim strogim pravilom, bi se mu zlahka zgodilo, tako kot kralju Širamu, katerega kašča iznajditelju šahovske igre ni dovoljevala podeliti dogovorjene nagrade.

Da bi ponujena nagrada Vego lahko drago stala pri tisti predpostavki, lahko spoznamo že brez vseh preračunov iz neke neprijetne okoliščine, ki jo je lahko utemeljiti, vendar, kolikor vem, to še nikjer ni bilo omenjeno. Ta neprijetna okoliščina je v tem, da so v tabeli logaritmov trigonometričnih funkcij števila v stolpcu za sinuse skoraj brez izjeme *) enaka vsoti števil v stolpcu za kosinuse in v stolpcu za tangense. Ker so ta števila le zaokrožene vrednosti natančnih iracionalnih količin, je jasno, da se pri strogo pravilnih zaokrožanjih ona enakost ne zgodi v vseh primerih, kjer so odstopanja od točnih vrednosti v drugem in tretjem stolpcu istega predznaka in je njuna vsota večja kot pol enote na zadnji decimalki. Zlahka se pregleda, da se večinoma pojavi ta izjemen primer povprečno enkrat med štirimi, kar lahko potrdimo z resničnim preštevanjem v takih sedemmestnih tabelah, pri katerih se je na pravilnost zadnje števke skrbno pazilo (Tako je

[9] Očitno Gauß šteje le decimalna mesta mantise logaritma (op. prev.).

[10] Gauß uporablja besedo *abgekürzt*, kar pomeni *skrajšano* (op. prev.).

*) Preveril sem glede tega velike dele tabel; samo med tisoč primeri sem našel eno samo izjemo, namreč pri kotu $27°54'0''$ (Gauß uporablja besedo *lok* namesto *kot* (op. prev.)). Vendar lahko to izjemo pripišem, tako kot nekaterim drugim, če bi se takšne pojavile še tu pa tam, pomoti in ne slabemu namenu.

na primer tako preštevanje pokazalo v omenjenih Köhlerjevih tablicah za 900 posameznih minut, od $30°0'$ do $44°59'$ točno 225 takih primerov, v katerih je popolno ujemanje vsekakor slučajno). Vegov Thesaurus vsebuje sinuse, kosinuse in tangense 22 680 kotov. Torej pri predpostavki, da so vsa števila v dveh od teh stolpcev strogo zaokrožena po pravilu, smemo z manjšo negotovostjo več ali manj pričakovati v tretjem stolpcu 5670 logaritmov, ki so določeni nepravilno za eno enoto. Za nagrado prav toliko dukatov bi bile dobro usposobljene osebe pripravljene vse skupaj preračunati popolnoma na novo.

Katera dva stolpca sta prvotna[11], lahko razpoznamo s primerjavo z drugačnimi, na več kot deset decimalk zanesljivimi izračuni, in to že pri nekaj kotih in z gotovostjo, ko se predpostavka stroge pravilnosti tiče prvotnih stolpcev, v nasprotnem primeru pa vsaj z veliko verjetnostjo na neki izdatni skupini.

Nekaj koristnega v zvezi s tem je že dokončano na koncu decimalnih tablic, ki sta jih leta 1799 priskrbela Hobert in Ideler in ki so natisnjene le s sedmimi števkami, toda v rokopisu so bile izdelane na dvakrat toliko. Tukaj je bilo prikazanih 138 napačnih logaritmov iz Vegovega Thesaurusa, od teh jih je 127, ki jih je treba popraviti za eno enoto na desetem mestu, da bi ustrezali pravilu, 10 za dve enoti in eno za tri enote. Od 127 jih odpade 49 na sinus, 35 na kosinus in 43 na tangens; preostalih 11 popravkov za 2 ali 3 enote se nanaša le na tangens. Prizadeti koti so deljivi[12] s 27 minutami, in nenavedeni so tisti, pri katerih logaritmi niso potrebni popravkov. Poleg tega naredimo te primerjave tudi brez Hobert-Idelerjevih na roko napisanih tabel, kajti na splošno razširjene Calletove tabele vsebujejo logaritme sinusov in kosinusov na 14 mest za vsako tisočinko kvadranta. Če si iz teh, tudi po potrebi za vse kote pod dvema stopinjama, izposodimo tiste, ki so deljivi

[11] Tista dva stolpca od treh, iz katerih je izračunan preostali (op. prev).
[12] Gauß piše *izmerljivi* (op. prev.).

s $5'24''$, toda ne s $27'$, dobimo primerjavo Vegovih logaritmov s 118 koti z natančnejšim izračunom, od koder postavimo rezultate v naslednjo shemo (I):

	Sin	Cos	Tang
0	65	75	54
1	53	43	53
2			10
3			1

Ta števila, na primer v zadnjem stolpcu, pomenijo, da je med 118 logaritmi tangensov 54 pravilnih, 53 jih je potrebnih popravka za 1 enoto na desetem mestu, 10 za 2 enoti in ena za 3 enote. Iz tega že sledi, da noben stolpec v Vegovih tabelah v celoti ni pravilno določen in da so z veliko verjetnostjo logaritmi tangensov preprosto izpeljani z odštevanjem števil iz stolpca kosinusov od tistih iz stolpca sinusov.

Avtorja omenjenih decimalnih tabel bi sicer lahko dala dvakrat toliko primerjav iz svojega rokopisa. Lahko pa ulovimo še veliko večji plen, če uporabljamo najbolj cenjene Briggsove tabele (v Trigonometria Britannica, ki jo je izdal Gellibrand po njegovi smrti leta 1633), ki prinašajo logaritme sinusov, kosinusov za vse stotinke običajne stopinje na 14 mest, in iz katerih si je Callet izposodil prej omenjena števila. Vsebuje snov, da lahko preverimo Vegove tabele za 1060 kotov, torej skupno za 3180 logaritmov. Sam sem se vendar omejil na preverjanje 81 kotov ali 243 logaritmov, od $14°0'$ do $18°0'$, iz katerih sledi rezultat (II):

	S.	C.	T.
0	29	56	36
1	52	25	42
2			3

Če združimo skupini (I) in (II), seveda tako, da skupne kote upoštevamo le enkrat, potem pridelamo za 190 kotov naslednjo shemo (III):

	S.	C.	T.
0	89	126	87
1	101	64	90
2			12
3			1

Če hočemo ta števila uporabiti za oceno razmerja med pravilnimi in nepravilnimi logaritmi, moramo najprej narediti majhen odbitek. V (I) je logaritem sinusa 45° dvakrat štet, namreč hkrati tudi kot $\log\cos 45°$; nadalje je vštet v tangensnem stolpcu tudi logaritem tangensa 45°, ki je racionalen. Isto velja za (III) in moramo zato, za zgornji namen, rezultat iz tega povedati v tem smislu, da se je izkazal med 568 preverjenimi iracionalnimi logaritmi 301 kot pravilen in 267 kot nepravilni. Če smemo to razmerje jemati kot povprečno, potem domnevamo, da je temu ustrezno med 68 038 iracionalnimi logaritmi Vegovega Thesaurusa (v katerem, kako poceni, kotangensi niso všteti) po vsej verjetnosti nekako 31 983 napačnih.

Verjetno pa je to število še znatno premajhno. Iz mojih papirjev, na katerih so bili pred daljšim časom in z drugim namenom izračunani logaritmi trigonometričnih funkcij na 14 mest za nekaj skupin kotov, ki si ne sledijo skokoma, ampak v istih intervalih kot v Vegovih tablicah, sledi najmanj to, da zgornji rezultat (III) še ne izpričuje nobenega pravilnega merila za nenatančnost teh tabel. Medtem ko pri onih 190 kotih ni nobenega posameznega primera, pri katerem bi bilo treba izboljšati logaritem sinusa ali kosinusa za več kot eno enoto, taki primeri niti niso redki pri tistih kotih, ki jih ni v Trigonometria Britannica, in kjer jih moramo torej za potrebno primerjavo pripraviti šele z posebnim računom. Zato tule prilagam rezultate tistega računanja, ki lahko služijo temu, da svojo predstavo o stopnji nenatančnosti števil v Vegovem Thesaurusu še bolj okrepimo.

Primerjava števil v Thesaurusu pri 21 kotih, od $15°38'20''$ do $15°41'40''$, z natančneje izračunanimi je dala (IV):

	S.	C.	T.
0	4	12	1
1	9	8	8
2	6	1	6
3	2		4
4			2

Primera, pri katerih se pojavijo največje napake in je treba vnesti popravke, sta:

$$\begin{array}{llrrr} 15°40'20'', & \text{s popravki} & +3, & -1, & +4, \\ 15°41'30'', & \text{s popravki} & +3, & 0, & +4, \end{array}$$

in sicer pri logaritmih sinusa, kosinusa in tangensa.

Prav tako je primerjava z Vegovimi števili pri 93 kotih, od $1°19'52''$ do $1°21'24''$, z natančneje izračunanimi dala (V):

	S.	C.	T.
0	38	30	17
1	39	56	41
2	15	7	22
3	1		11
4			2

Največji odstopanji sta pri kotih $1°20'10''$ in $1°20'15''$; potrebni popravki so pri prvem $-2, +1, -4$ in pri drugem $-2, +2, -4$.

Skupini IV in V nimata enakega izvora, kajti števila v Thesaurusu za skupino IV so vzeta iz Vlacqove Trigonometria Artificialis, nasprotno pa preostala spadajo k pridruženim, ki jih je pod Vegovim vodstvom in nadzorstvom izračunal poročnik Dorfmund. Po zgornjih shemah se zadnja zazdijo nekako manj nenatančna kot prva, čeprav je skupina IV premalo številna, da bi utemeljili zanesljivo presojo. Vsekakor iz obeh skupin, ko ju damo na kup, sledi ocena *totalna nenatančnost* tabel, ki je prej nekoliko preugodna kot obratno. Iz te primerjave sledi za 114 kotov (VI):

	S.	C.	T.
0	42	42	18
1	48	64	49
2	21	8	28
3	3		15
4			4

Torej sta tukaj med 342 logaritmi le 102 taka, ki ne potrebujeta izboljšave, proti 240 nenatančnim. Po tem razmerju bi lahko med 68 038 iracionalnimi logaritmi pričakovali 47 746 nenatančnih.

Vsota kvadratov odklonov je za sinuse 159, za kosinuse 96, za tangense 360. Kot srednjo napako lahko torej vzamemo za sinuse 1,18, za kosinuse 0,92, za tangense 1,78. Potem ne moremo dvomiti, da so logaritmi tangensov izvedeni. Da so števila v kosinusnem stolpcu manj nenatančna kot ona v sinusnem stolpcu, pač vsaj deloma nedvomno prihaja iz tega, da prve za izpolnitev potrebne interpolacijske metode izpadejo enostavnejše, morda pa lahko vmes sodelujejo še drugi vzroki, o čemer bi si lahko postavili le nezanesljive domneve.

Konec prevoda. Tako hud je bil torej Gauß glede Vegovega Thesaurusa, ki naj bi bila vendar popolna zakladnica logaritmov, in Vegove obljube izplačila enega dukata za vsako najdeno napako tistemu, ki mu jo prvi prijavi. Gauß si je pač pod *popolno zakladnico logaritmov* predstavljal popolno delo, delo brez napak. Pravijo pa, da v Gaußovih objavljenih delih niso našli napak. Gauß je zapustil tudi veliko neobjavljenega, ker je dajal na svetlo samo tisto, kar je bilo po njegovem mnenju nesporno pravilno. Bil je pri tem skrajno previden. Znano je, da ni želel potrditi koncepta neevklidske geometrije, kakršnega je predlagal mladi János Bolyai (1802–1860). Gauß je zapustil tudi izvod Vegovega Thesaurusa, iz katerega se vidi, da ga je kljub pomanjkljivostim veliko uporabljal.

7 Prenagljeni sklepi in napačne domneve

Marin Mersenne (1588–1648), francoski teolog, filozof, matematik in glasbeni teoretik, je prejel številna pisma, v katerih so ga drugi znanstveniki, na primer Descartes, Fermat, Pascal, spraševali o marsičem. Mersenne je študiral števila $M_n = 2^n - 1$, kjer je n naravno število, večje od 1. Števila imenujemo *Mersennova števila*. Njihovo zaporedje se prične tako:

$$3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, \ldots$$

Hitro se vidi, da za sode eksponente $4, 6, 8, \ldots$ dobimo sestavljena števila

$$15, 63, 255, 1\,023, 4\,095, 16\,383, 65\,535, 262\,143, \ldots$$

oziroma v razstavljeni obliki

$$3 \cdot 5, 3^2 \cdot 7, 3 \cdot 5 \cdot 17, 3 \cdot 11 \cdot 31, 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13, 3 \cdot 43 \cdot 127, 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257, 3^3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 73, \ldots$$

Hitro se tudi vidi, da so za vsa sestavljena števila $n > 2$ Mersennova števila tudi sestavljena. Če je namreč $n = qr$, sta faktorja $q, r \geq 2$ in

$$2^{qr} - 1 = (2^q)^r - 1 = (2^q - 1)(2^{q(r-1)} + \ldots + 1),$$

kar pomeni, da je M_{qr} res sestavljeno število.

Mersennova števila pa postanejo zanimiva za praštevilske indekse p, torej za $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$. Če je tudi M_p praštevilo, govorimo o *Mersennovih praštevilih*. Naštejmo nekaj števil M_p za prva praštevila p:

$$3, 7, 31, 127, 2\,047, 8\,191, 131\,071, 524\,287.$$

Med temi samo $M_{11} = 2\,047 = 23 \cdot 89$ ni praštevilo.

Mersenne je trdil, da so M_n praštevila za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$, za vsa druga naravna števila n od 4 do 257 pa sestavljena števila. Zares so bila v njegovem času znana Mersennova praštevila

$$3, 7, 31, 127, 8\,191, 131\,071, 524\,287.$$

Euler je leta 1750 dokazal, da je

$$M_{31} = 2\,147\,483\,647$$

Mersennovo praštevilo. Nato je na vrsti število

$$M_{67} = 147\,573\,952\,589\,676\,412\,927 = 193\,707\,721 \cdot 761\,838\,257\,287,$$

ki ni praštevilo. Na Mersennovem spisku sledi število

$$M_{127} = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727,$$

ki je praštevilo, kar je leta 1876 dokazal Lucas. Zadnje na Mersennovem spisku je ogromno število

$$M_{257} = 231\,584\,178\,474\,632\,390\,847\,141\,970\,017\,375\,815\,706$$

$$539\,969\,331\,281\,128\,078\,915\,168\,015\,826\,259\,279\,871,$$

ki pa je sestavljeno:

$$M_{257} = 535\,006\,138\,814\,359 \cdot 1\,155\,685\,395\,246\,619\,182\,673\,033\cdot$$

$$374\,550\,598\,501\,810\,936\,581\,776\,630\,096\,313\,181\,393.$$

So pa Mersennova praštevila tudi

$$M_{61} = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951,$$

$$M_{89} = 618\,970\,019\,642\,690\,137\,449\,562\,111,$$

$$M_{107} = 162\,259\,276\,829\,213\,363\,391\,578\,010\,288\,127.$$

Kdo ve zakaj, a Mersenne o teh treh molči. Mersenne je torej na svoj spisek napačno uvrstil dve števili, treh pa nanj ni dal.

Mersennova praštevila so pomembna pri iskanju *popolnih števil*. Naravno število n je popolno, če je vsota svojih deliteljev razen n. Tako število je na primer 6, ki ima delitelje $1, 2, 3$, katerih vsota je 6. Tudi 28 je popolno število. Ima namreč delitelje $1, 2, 4, 7, 14$. Njihova vsota je 28. Popolni sta tudi števili

496 in 8 128. Že iz antičnih časov je znano, da je vsako sodo popolno število oblike $2^{n-1}M_n$, če je M_n Mersennovo praštevilo. Nihče pa ne ve, če obstaja tudi kakšno liho popolno število.

Podobno bi lahko iz nekaj prvih števil v zaporedju

$$31, 331, 3\,331, 33\,331, \ldots$$

prehitro sklepali, da so to sama praštevila. V zaporedju ima n-ti člen a_n v desetiškem zapisu n trojk, enica pa je vedno ena. Z nekaj truda lahko zapišemo

$$a_n = 1 + 3(10 + 10^2 + \ldots + 10^n) = 1 + 30\frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^{n+1} - 7}{3},$$

kjer smo uporabili znano formulo za vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja. Praštevila so res $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, $a_8 = 333\,333\,331 = 17 \cdot 19607843$ pa ne. Sledi po vrsti še nekaj sestavljenih števil, pa ne moremo kar reči, da so potem od a_8 naprej vsa sestavljena, ker nas preseneti $a_{17} = 333\,333\,333\,333\,333\,331$, ki je praštevilo.

Nam se zdi vse to otročje preverjati, ker za nas računa na primer računalniški program *derive*. Nekoč pa so računali na roko ali pa so se znašli kako drugače.

Dobro znani so razcepi

$$\begin{aligned}
x^1 - 1 &= x - 1 \\
x^2 - 1 &= (x-1)(x+1) \\
x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \\
x^4 - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2+1) \\
x^5 - 1 &= (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)
\end{aligned}$$

Na prvi pogled opazimo, da so koeficienti v zgornjih razcepih samo -1 in 1. Leta 1938 je menil Nikolaj Grigorjevič Čebotarjov (1894–1947, Николай Григорьевич Чеботарёв), da je to res za razcep polinoma $x^n - 1$ pri vsakem naravnem n. A že leta 1941 je Valentin Konstantinovič Ivanov (1908–1992, Валентин Константинович Иванов) odkril, da razcep polinoma $x^{105} - 1$ vsebuje faktor, v katerem nastopa poleg ± 1 tudi koeficient -2, in to kar dvakrat. Razcep polinoma $x^{2805} - 1$ pa ima faktor, v katerem poleg ± 1 nastopajo še $\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6$. Že *derive* pokaže, da je to res.

Euler je dokazal, da enačba $x^3 + y^3 = z^3$ nima rešitev v naravnih številih. Nato je predvideval, da jih tudi enačbi $x^4+y^4+z^4 = u^4$ in $x^5+y^5+z^5+u^5 = v^5$ nimata. Toda to ni res. Noam David Elkies, rojen leta 1966, je leta 1988 našel

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4,$$

že leta 1966 pa sta Leon J. Lander in Thomas R. Parkin odkrila

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Roger Frye je našel še manjši primer kot Elkies:

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Adrien-Marie Legendre (1752–1833) je trdil, da ne obstajata pozitivni racionalni števili p in q, za kateri velja $p^3 + q^3 = 6$. Toda Henry Ernest Dudeney (1857–1930) je to trditev ovrgel, ko je zapisal

$$\left(\frac{17}{21}\right)^3 + \left(\frac{37}{21}\right)^3 = 6.$$

8 Napaka ni poceni

Jules Henri Poincaré (1854–1912) je bil zelo produktiven matematik, eden zadnjih univerzalistov, saj se je ukvarjal z matematiko, matematično fiziko, nebesno mehaniko in filozofijo. V matematiki, natančneje v topologiji, je postavil znamenito *Poincaréjevo domnevo*, s katero je poskrbel, da so imeli matematiki naslednjih sto let kaj delati.

Poincaréjevo domnevo ali hipotezo je končno dokazal leta 2002 Grigorij Jakovljevič Perelman (rojen 1966, Григорий Яковлевич Перельман) in si prislužil Fieldsovo medaljo, ki mu bi morala biti izročena leta 2006 na mednarodnem matematičnem kongresu v Madridu, a jo je odklonil češ, da je ne potrebuje, saj, *če dokaz velja, za to ni potrebno nobeno drugo priznanje*. Prav tako je odklonil nagrado v višini milijona ameriških dolarjev, ki mu jih je ponujal Clay Mathematics Institute.

Kljub vsej uspešnosti pa je Poincaré zašel v resne, celo denarne težave. Kdor pač dela, dela tudi napake. Tega nekateri sicer ne obešajo na velik zvon. Za 60. rojstni dan kralja Oskarja II. (1829–1907) je švedski matematik Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler (1846–1927) predlagal, da se razpiše nagrada za najboljše matematično delo, ki bi obravnavalo štiri vprašanja: problem več teles in s tem povezano stabilnost Sončevega sistema, Fuchsovo teorijo diferencialnih enačb, nelinearne diferencialne enačbe in algebraične odnose za Fuchsove funkcije, ki imajo isto avtomorfno grupo. Razpis je bil objavljen v znani reviji *Acta Mathematica*, ki jo je leta 1882 ustanovil Mittag-Leffler. V komisiji za nagrado sta bila poleg Mittag-Lefflerja še Charles Hermite (1822–1901), pri katerem je doktoriral leta 1879 Henri Poincaré, in Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897). Dela, ki bi kandidirala za nagrado, so sprejemali do prvega junija 1888. Nagrajeni prispevek naj bi nato objavili v Acta Mathematica.

Matematiki so se poglobili v razpisane probleme in pravočasno je komisija za podelitev nagrade prejela dvanajst prispevkov. Kar pet jih je obravnavalo prvi problem. Poincaré je poslal prispevek, dolg 158 strani, ki pa ni popolnoma ustrezal razpisnim pogojem, a ga kljub temu niso zavrnili in so ga obravnavali. Poincaré je takrat že bil član francoske akademije znanosti in dopisni član akademije znanosti v Göttingenu. Ko so prerešetali vseh dvanajst predlogov, so ostali pri treh: pri Poincaréjevem, Appellovem in enem iz Heidelberga. Paul Émile Appell (1855–1930) je bil rektor pariške univerze med letoma 1920 in 1925. Tako kot Hermite je znan po svojih polinomih. Izdal je zbrana dela Henrija Poincaréja. Nazadnje so se, ne popolnoma brez težav, odločili, da nagrado kralja Oskarja II. dobi Poincaré. Prejel je 2500 kron in zlato medaljo. Temeljito je obdelal problem treh teles. Ena od omenjenih težav je bila Weierstraßova bolezen, zaradi katere je bilo treba na končno mnenje o Poincaréjevem delu nekoliko počakati. Mnenje nikoli ni bilo objavljeno. Drugo težavo je sprožil astronom Johan August Hugo Gyldén (1841–1896), ki se je tudi ukvarjal s problemom treh teles, in je prišel, brez dokazov, do podobnih rezultatov kot Poincaré. Mittag-Leffler je slednjega branil z vsemi štirimi in uspel.

Po prejemu nagrade je Poincaréjev prispevek, kakor je v takih primerih splošna navada, šel v tisk. Izdajatelj revije Acta Mathematica, Lars Edvard Phragmén (1863–1937) je Poincaréja prosil, da natančneje pojasni nekaj stavkov v prispevku. Poincaré je pogosto imel marsikatero trditev za samoumevno in se ni dal prepričati, da bi jo natančneje pojasnil. Tokrat pa ni šlo gladko. Ko je skušal po Phragménovem nasvetu pojasniti neko mesto v besedilu, je odkril bistveno napako. Prezrl je namreč še eno možnost, ko sistem treh teles utegne biti nestabilen. V bistvu je šlo za prvi primer kaotičnega obnašanja. Teorija kaosa se je zelo razmahnila na koncu 20. stoletja, v obdobju hitrih računalnikov.

Tako Poincaré kot Mittag-Leffler nista želela omajati ugleda nagrade in revije. Nerodno je bilo, da so 50 izvodov že natiskali in razposlali. Mittag-Leffler je uspešno posredoval, ustavil tisk in dobil nazaj 49 izvodov. Toda Poincaré, ki je celo želel vrniti nagrado, jo je raje brez pripomb žrtvoval za nov natis, pa je bilo še okoli 1000 kron premalo. Za primerjavo, letna Mittag-Lefflerjeva plača je znašala takrat okoli 7000 kron. Svoj prispevek je Poincaré temeljito popravil in beli dan je ugledal z zamudo decembra leta 1890. Mittag-Leffler se je strahovito zavzel za to, da bi neprijetna prigoda ne prišla v javnost. Prepričal je celo Poincaréja, da je Phragménu napisal lepo pozitivno strokovno mnenje, da je le-ta lahko zasedel katedro za mehaniko na univerzi v Stockholmu in postal soizdajatelj revije Acta Mathematica.

S tem smo želeli pokazati, da so tudi veliki matematiki samo ljudje. Sploh pa je težava tiskanih objav ne samo v tem, da so drage, ampak tudi v tem, da napake ostanejo najmanj do naslednje izdaje, če do nje sploh pride in če jih je avtor uspel popraviti. Danes pa ljudje veliko objavljajo kar na spletu.

9 Lom svetlobe

Odboj in lom svetlobe sta zelo pomembna optična pojava, saj zaradi njiju pravzaprav vidimo. Približno do leta 1000 je veljalo zmotno mišljenje, da vidimo zato, ker naše oči nekaj oddajajo in se tisto odbija od predmetov. Šele Alhazen (965–1040), islamski znanstvenik, je spoznal, da vidimo samo, če imamo vir svetlobe in če se svetloba od predmetov odbija v naše oči. Odkril je tudi, da lom svetlobe na ukrivljenih kosih stekla omogoča povečavo, kar je kasneje pripeljalo do izdelave prvih očal. Alhazen se je ukvarjal tudi s popolnimi števili, vsoto potenc in biljardnim problemom. Lom svetlobe so proučevali že Evklid, Klavdij Ptolemaj (85–170, Κλαύδιος Πτολεμαῖος), ki je sestavil tabelo vpadnih in lomnih kotov za prehod svetlobe iz zraka v vodo, in drugi. Do lomnega zakona, kakršnega poznamo danes, je bila še dolga pot. Kot zanimivost navedimo samo Renéja Descartesa (1596–1650), ki je našel pravilno obliko lomnega zakona, toda trdil je, da se svetloba v optično gostejšem sredstvu širi hitreje kot v optično redkejšem sredstvu. Prav pa je ravno obratno. Willebrord Snellius (1580–1626) pa je tisti, po katerem se imenuje lomni zakon tudi *Snellov zakon*.

Dodajmo še to, da se je s svetlobo ukvarjal tudi Fermat, ki je postavil svoj princip, po katerem se svetloba širi po prostoru od točke A do točke B tako, da je čas potovanja najmanjši. Tu se dela pogosto napako. Čas potovanja svetlobe od A do B je *stacionaren*. Vmes se svetloba lahko lomi ali odbija. Pri eliptičnem zrcalu potuje svetloba iz enega gorišča, se na elipsi odbije in dospe do drugega gorišča v istem času, ne glede, kje na elipsi se odbije. S Fermatovim principom lahko izpeljemo odbojni in lomni zakon, pa tudi bolj zapletene primere širjenja svetlobe po optično nehomogenem sredstvu.

10 Portreti

Dogajale so se tudi napake v zvezi s portreti znanih matematikov v matematičnih besedilih in drugje. V Italiji so leta 1983 izdali poštno znamko v čast Arhimeda. Za njegovo podobo so uporabili fotografijo kipa, ki naj bi ga predstavljal. Kip so izkopali iz pepela v Herkulaneumu, natančneje v Villa degli papiri. Herkulaneum, Stabije in Pompeje je leta 79 uničil izbruh Vezuva. Mesta so ostala pod debelo plastjo vulkanskega pepela dolga leta. Izkopavanja so se začela leta v prvi polovici 18. stoletja. Izkazalo pa se je, da ne gre za kip Arhimeda, ampak spartanskega kralja Arhidama III. (400–338 pne. Ἀρχίδαμος Γʹ), sina Agesilaja II. (444–360 pne., Ἀγησίλαος Βʹ).

Slika 4: Kip Arhidama III., znamka in umetniška Arhimedova podoba

Zamenjava Arhidama za Arhimeda ni edina v zgodovini matematike. Dolga leta so za podobo že omenjenega matematika Legendra imeli portret politika Louisa Legendra (1752–1797). Napako so odkrili šele leta 2005.

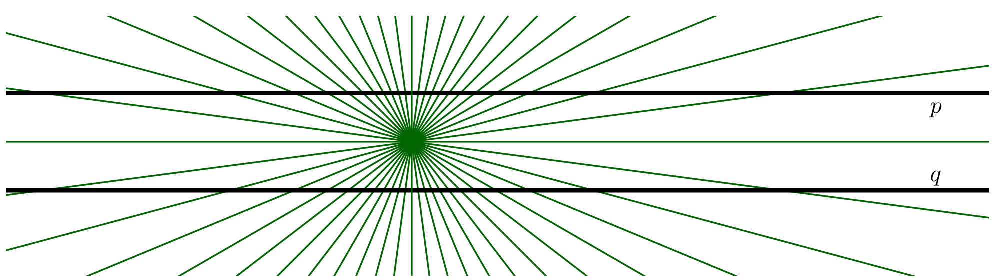
Slika 5: Politik Legendre in matematik Legendre

Matematik Legendre se ni nikoli portretiral, obstaja samo karikatura. Po njem imamo Legendrove polinome, Legendrovo diferencialno enačbo, Legendrovo enakost, Legendrov simbol, Legendrovo obliko eliptičnih integralov in še kaj.

Za konec

Napake v znanosti, tudi v matematiki, se pač dogajajo. Nekatere so majhne in jih hitro opazimo ter popravimo. Lahko pa so velike in usodne. Pri tem ne mislimo samo na računske napake, napake zaradi nedovoljenih aritmetičnih operacij ali na napake kot zanimivost, ampak na napake, ki so nastale zaradi prenaglega sklepanja, zaradi nezmožnosti kontrole, zaradi zanašanja na intuicijo, pa tudi na napake, ki so nastale iz filozofskih pogledov. Računske napake smo omenili pri računanju števila π. Tu je odpovedala kontrola, ker pri doseganju novih rekordov v številu decimalk boljšega rezultata ni bilo. Uporabljene metode so bile sicer dobre, računalo se je na dovolj decimalk, a kaj, ko pa pri ročnem računanju človek hitro naredi napako, ki se potem bolj ali manj pozna v končnem rezultatu.

V poplavi aksiomov, definicij, lem, izrekov, trditev in posledic matematik hitro spregleda kakšno malenkost, naredi napačno predpostavko, ne upošteva vseh možnosti ali kaj podobnega in napaka je tu. Danes veliko matematikov dela na istem področju, članki se temeljito pregledujejo, preden se objavijo, tako da je možnost, da se napaka izmuzne, zelo majhna, a še vedno je možna.



Slika 6: Ali sta premici p in q vzporedni?

Literatura

[1] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen **46** (1895), str. 481–512.

[2] C. F. Gauß, *Einige Bemerkungen zu Vega's Thesaurus Logarithmorum*, Astronomische Nachrichten **32** (1851), No. 13, str. 181–188.

[3] I. Novak, *Latinski reki in pregovori*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 2004.

[4] A. S. Posamentier, I. Lehmann, *Magnificent mistakes in mathematics*, Prometheus Books, Amherst, New York, 2013.

[5] G. Vega, *Thesaurus logarithmorum completus*, Weidmann, Leipzig, 1794.

[6] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.

[7] I. Vidav, *Števila in matematične teorije*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1965.

[8] B. Wardhaugh, *A 'lost' chapter in the calculation of π: Baron Zach and MS Bodleian 949*, Historia mathematica **42** (2015), No. 3, str. 343–351.