Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo

Marko Razpet

MADAMINA

Matematične teme z didaktiko

Ljubljana, november 2014

Kazalo

Tabele

Slike

Predgovor

Števila, za katera veliko ljudi misli, da so že kar prava matematika, običajno mislimo na naravna, so bila vedno zanimiva. Praljudje so se že verjetno igrali s kamenčki, fižolčki, kroglicami in podobnimi rečmi, jih razvrščali v ravne črte, kroge, trikotnike, kvadrate in druge like, jih šteli in skušali najti neka splošna pravila. Pitagorejci so številom pripisali veliko, že kar pretirano pomembnost. Prepričani so bili, da so števila (ἀριϑμοί) in razmerja (λόγοι) prisotna vsepovsod, tudi v naravi, umetnosti, družbi in vesolju.

V pričujočem sestavku bomo predstavili nekaj primerov števil, pobranih z različnih področij, da bi s tem spoznali, da je matematika prisotna vsepovsod. Pokazali bomo tudi nekaj prijemov, kako se lotimo nekaterih problemov.

Mimogrede bomo pojasnili izvor marsikatere besede, s katero se kitimo v vsakdanjem govoru, ne da bi pomislili, da prihaja iz stare grščine. S tem naj bi začutili vsaj delček veličine antične kulture. Komur pa to nič ne pomeni, temu pač ni pomoči in naj razpravo o tem raje kar preskoči. Nič pa ne bo odveč, in to nikoli ni, če ponovimo klasični grški alfabet (ἄλφα, βῆτα, prvi dve črki v razvrstitvi grških črk):

Α α	alfa	Ι ι	jota	Ρ ρ	ro
Β β	beta	Κ ϰ	kapa	Σ σ ς	sigma
Γ γ	gama	Λ λ	lambda	Τ τ	tav
Δ δ	delta	Μ μ	mi	Υ υ	ipsilon
Ε ε	epsilon	Ν ν	ni	Φ φ	fi
Ζ ζ	zeta	Ξ ξ	ksi	Χ χ	hi
Η η	eta	Ο ο	omikron	Ψ ψ	psi
Θ ϑ	theta	Π π	pi	Ω ω	omega

Matematiki, fiziki in astronomi (same grške besede), pa tudi drugi znanstveniki, na veliko uporabljajo predvsem male grške črke. Nekatere imajo po dve obliki, na primer epsilon zapišejo včasih kot ϵ, včasih kot ε. Prav tako theta kot θ in ϑ, kapa kot κ in $\varkappa$, pi kot π in ϖ, ro kot ρ in ϱ, sigma kot σ in ς ter fi kot ϕ in φ. Ni resne znanosti brez grških črk!

Ljubljana, november 2014 — Dr. Marko Razpet

1 Število don Juanovih ljubic

Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791) je ustvaril veliko čudovite glasbe, tudi opero v dveh dejanjih *Don Juan*, morda bolj znano kot *Don Giovanni*. Na veliko ljudi deluje Mozartova glasba pomirjajoče. Izvajajo jo po vsem kulturnem svetu. Tako kot naš Jurij Vega (1754–1802) je bil tudi Mozart član neke prostozidarske lože na Dunaju. Prostozidarjem je posvetil celo nekaj skladb, ki jih še dandanes uporabljajo pri svojih obredih in ki upoštevajo precej numerologije. V svoji prostozidarski vnemi je Mozart skomponiral opero *Čarobna piščal – Die Zauberflöte* in *Masonsko žalno glasbo – Maurerische Trauermusik*.

Premiera ali krstna izvedba Mozartovega Don Juana je bila 29. oktobra 1787 v Pragi. Libreto je napisal Lorenzo da Ponte (1749–1838). Zaradi števil si oglejmo del arije Leporella, don Juanovega sluga, iz prvega dejanja, in sicer v originalnem jeziku, italijanščini. V tem jeziku jo pogosto prepevajo po številnih koncertnih in opernih odrih povsod po svetu.

> *Madamina, il catalogo è questo*
>
> *Delle belle che amò il padron mio;*
>
> *Un catalogo egli è che ho fatt'io;*
>
> *Osservate, leggete con me.*
>
> *In Italia* **seicento e quaranta***;*
>
> *In Alemagna* **duecento e trentuna***;*
>
> **Cento** *in Francia, in Turchia* **novantuna***;*
>
> *Ma in Ispagna son già* **mille e tre**.

Beseda **madamina**, ki je pomanjševalnica besede **madam**, je dala temu delu ime. Pomeni seveda lepo mlado damo, damico, madamico, gospodično. Z besedo **madamina** Leporello naslavlja Elviro, ki jo je zapeljal don Juan in zapustil, ona pa še kar računa nanj. Leporello jo želi odvrniti od don Juana kot velikega grešnika, celo morilca. Operno besedilo so bolj ali manj posrečeno prevedli tudi v druge jezike. V angleščini se odlomek glasi takole:

My dear lady, this is a list
Of the beauties my master has loved,
A list which I have compiled.
Observe, read along with me.
In Italy, **six hundred and forty***;*
In Germany, **two hundred and thirty-one***;*
A hundred *in France; in Turkey,* **ninety-one***;*
But in Spain already **one thousand and three**.

V prevodu v slovenščino, ki ga je napisal Smiljan Samec (1912–1995) in se uporablja na naših odrih, ko se opero ali samo njeno arijo izvaja v slovenščini, so števila nekoliko drugačna.

Lepa dona, protokol ta poglejte:
vsaka ljuba gospoda don Juana
v njem je točno zaznamenovana;
če vam drago, prečitajva ga!
V laški zemlji **šeststo in pa dvajset**,
tam na Nemškem **dvesto triindvajset**,
sto *na Francoskem, na Turškem* **sto štiri**,
a na Španjolskem že **tisoč in tri***!*

Beseda *zaznamenovana* namesto *zaznamovana* danes zveni precej tuje. Prav tako so v nemščini števila druga. Vidimo, da so Nemci, verjetno zaradi ohranjanja taktov, namesto Turčije vzeli nekoliko bolj oddaljeno Perzijo:

Schöne Donna! Dies genaue Register,
Es enthält seine Liebesaffären;
Der Verfasser des Werks bin ich selber;
Wenn's gefällig, so geh'n wir es durch.

In Italien **sechshundertundvierzig**,

Hier in Deutschland **zweihundertunddreißig**,

Hundert *in Frankreich und* **neunzig** *in Persien,*

Aber in Spanien schon **tausend und drei**.

Pevec bi v francoščini zapel naslednje besedilo:

Chère madame, voici le catalogue

Des belles qu'a aimées mon maître;

C'est un catalogue que j'ai fait moi-même;

Regardez, lisez avec moi.

En Italie **six cent quarante**,

En Allemagne **deux cent trente et une**,

Cent *en France, en Turquie* **quatre-vingt-onze**,

Mais en Espagne elles sont déjà **mille trois**.

V francoščini je zanimiv števnik **quatre-vingt-onze** za enaindevetdeset. Beseda **quatre** pomeni štiri, **vingt** dvajset, **onze** pa enajst. Dobesedno pomeni **quatre-vingt-onze** štiri dvajsetice in enajst, to je enaindevetdeset.

Matematik takoj opazi glagol *lisez*, ki ga je uporabil matematik, fizik, astronom in filozof Pierre Simon Laplace (1749–1827) v znamenitem stavku:

Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.

To pomeni:

Berite Eulerja, berite Eulerja, on je naš učitelj v vsem.

Leonhard Euler (1707–1783) je bil eden največjih matematikov in fizikov vseh časov.

V španščini pa gre Madamina tako:

Señorita, el catálogo es este

de las bellas que amó mi patrón;

un catálogo que yo mismo hice;

observad, leed conmigo.

En Italia, **seiscientas cuarenta***;*

En Alemania, **doscientas treinta y una***;*

Cien *en Francia; en Turquía,* **noventa y una***;*

Pero en España son ya **mil y tres**.

V ruščini, ki je poleg angleščine, nemščine, španščine zagotovo velik jezik, so se ohranili isti števniki kot v italijanščini:

Миледи, вот этот список:

Красавиц, которых мой господин любил,

Этот список, который я сам составил,

Смотрите, читайте вместе со мной.

В Италии – **шестьсот сорок***,*

В Германии – **двести тридцать одна***,*

Сотня - *во Франции, в Турции –* **девяносто одна***,*

Но в Испании уже **тысяча три***.*

V ruščini obstajata zanimiva števnika **сорок** (s poudarkom na prvem zlogu), kar pomeni **štirideset**, in **девяносто**, kar pomeni devetdeset. Njuna etimologija (iz ἔτυμον, resničen, pravi, in λόγος, beseda, misel) je po svoje zanimiva. Števnik **сорок** so uporabljali trgovci za sveženj 40 kož veveric ali soboljev. In beseda, ki ima izvor v nordijskih jezikih, je prišla v splošno rabo. Za besedo **девяносто** pa si etimologi niso popolnoma edini, kako jo razložiti.

Sledi naštevanje poklicev in stanov, ki jim vse te ženske pripadajo. Po Leporellovem seznamu v italijanščini je imel don Giovanni vsega skupaj 2065 ljubic: v Italiji 640, na Nemškem 231, na Francoskem 100, v Turčiji 91 in na Španskem celo 1 003. Kaj početi z vsemi temi števili in njihovo vsoto? Najprej jih uredimo po velikosti. Če drugega ne, jih nato razstavimo na prafaktorje:

$$\begin{aligned} 91 &= 7 \cdot 13, \\ 100 &= 2^2 \cdot 5^2, \\ 231 &= 3 \cdot 7 \cdot 11, \\ 640 &= 2^7 \cdot 5, \\ 1\,003 &= 17 \cdot 59, \\ 2\,065 &= 5 \cdot 7 \cdot 59. \end{aligned}$$

Iz razcepov takoj opazimo, da števila iz množice

$$\mathcal{M} = \{91, 100, 231, 640, 1003, 2065\}$$

nimajo nobenega skupnega faktorja razen 1. Njihov največji skupni delitelj je zato 1. Navadno to zapišemo takole:

$$D(91, 100, 231, 640, 1003, 2065) = 1.$$

Kaj pa če vzamemo 5 števil iz množice $\mathcal{M}$? Takih izborov je

$$\binom{6}{5} = 6,$$

to je število izbir 5 elementov izmed 6 oziroma število kombinacij brez ponavljanj 6 elementov 5. razreda ali število podmnožic s 5 elementi v množici $\mathcal{M}$, ki ima 6 elementov. Ker v vsaki podmožici v tem primeru manjka natančno eden iz $\mathcal{M}$, jih ni težko našteti:

$$\{100, 231, 640, 1003, 2065\}, \{91, 231, 640, 1003, 2065\}, \{91, 100, 640, 1003, 2065\},$$

$$\{91, 100, 231, 1003, 2065\}, \{91, 100, 231, 640, 2065\}, \{91, 100, 231, 640, 1003\}.$$

Vse podmnožice s 5 elementi v množici $\mathcal{M}$ sestavljajo števila, ki imajo skupni delitelj 1.

Obstaja kar

$$\binom{6}{4} = 15$$

podmnožic s 4 elementi v množici $\mathcal{M}$. Tudi vse podmnožice s 4 elementi v množici $\mathcal{M}$ sestavljajo števila, ki imajo skupni delitelj 1. Dolgočasno, kajne? Število

$$\binom{6}{3} = 20,$$

ki pove, koliko trielementnih podmnožic je v množici $\mathcal{M}$, je nekoliko večje, pa še vedno pritlikavo v primerjavi z ogromnimi števili, ki nastopajo v praksi. V tem primeru imamo na podlagi razcepov na prafaktorje

$$D(91, 231, 2065) = 7, D(100, 640, 2065) = 5,$$

preostale podmnožice s 3 elementi v množici $\mathcal{M}$ pa sestavljajo števila, ki imajo skupni delitelj 1.

Število

$$\binom{6}{2} = 15$$

pove, koliko je dvoelementnih podmnožic množice $\mathcal{M}$. Največji skupni delitelji so bolj zanimivi:

$$D(91, 231) = 7, D(91, 2065) = 7, D(100, 640) = 20, D(100, 2065) = 5,$$

$$D(231, 2065) = 7, D(640, 2065) = 5, D(1003, 2065) = 59.$$

Preostalih podmnožice z dvema elementoma v množici $\mathcal{M}$ pa sestavljajo števila, ki imajo skupni delitelj 1. Zlahka preverimo na primer še račun

$$D(91, 231, 2065) = D(D(91, 231), 2065) = D(7, 2065) = 7.$$

Seveda lahko iskanje največjega skupnega delitelja dveh naravnih števil opravimo tudi z Evklidovim algoritmom. Kako to gre, pokažimo za števili 231 in 2065.

$$\begin{aligned}
2065 &= 231 \cdot 8 + 217, \\
231 &= 217 \cdot 1 + 14, \\
217 &= 14 \cdot 15 + 7, \\
14 &= 7 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Zadnji od 0 različen ostanek pri tem verižnem deljenju je 7, kar je iskani največji skupni delitelj števil 231 in 2065.

Katera od števil iz množice $\mathcal{M}$ so vsote dveh kvadratov, to pomeni da se jih da zapisati kot vsoto kvadratov dveh naravnih števil? Znano je, da je najmanjše praštevilo, to je 2, vsota dveh kvadratov:

$$2 = 1^2 + 1^2.$$

Od lihih praštevil pa so vsote dveh kvadratov samo tista, ki pri deljenju s 4 dajo ostanek 1. Če dajo pri deljenju s 4 ostanek 3, pa ne. To je domneval, kot še marsikaj drugega v zvezi s števili, Pierre Fermat (1601–1665), dokazala Leonhard Euler (1707–1783) in Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Richard Dedekind (1831–1916) in drugi pa so dokaz še poenostavili. Ostankov 0 ali 2 pa pri deljenju s 4 liho praštevilo ne more dati, o čemer se lahko hitro sami prepričamo.

Število $91 = 7 \cdot 13$ ni vsota dveh kvadratov, ker prafaktor 7 da ostanek 3 pri deljenju s 4. Pač pa število $8281 = 91^2 = 7^2 \cdot 13^2$ je vsota dveh kvadratov, ker praštevilo 13 da ostanek 1 pri deljenju s 4. Res lahko najprej zapišemo

$$13 = 3^2 + 2^2,$$

nato pa še na primer

$$169 = 13^2 = (3^2 + 2^2)^2 = |3 + 2i|^4 = |(3 + 2i)^2|^2 = |5 + 12i|^2 = 5^2 + 12^2.$$

Nič novega ne bi dobili, če bi zapisali

$$(3^2 + 2^2)^2 = |\pm 3 \pm 2i|^4 \quad \text{ali} \quad (3^2 + 2^2)^2 = |\pm 2 \pm 3i|^4.$$

Nazadnje lahko napišemo:

$$91^2 = 7^2 \cdot 13^2 = 7^2 \cdot (5^2 + 12^2) = 35^2 + 84^2.$$

Če drugega ne, smo pokazali primer uporabnosti kompleksnih števil.

Sedaj se lahko vprašamo, koliko rešitev (x, y) ima enačba $x^2+y^2 = 91^2$ v celih številih oziroma, koliko točk s celoštevilskimi koordinatami leži na krožnici s polmerom $r = 91$ z enačbo $x^2 + y^2 = 91^2$ v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy. Trivialne rešitve uganemo, z zgornjim rezultatom pa lahko preostale, dobljene z zrcaljenji, še dodamo, tako da lahko zapišemo vseh 12 točk:

$$(91, 0), (-91, 0), (0, 91), (0, -91), (35, 84), (-35, 84),$$

$$(35, -84), (-35, -84), (84, 35), (-84, 35), (84, -35), (-84, -35).$$

r	Razcep na prafaktorje	$N(r)$
1		4
2	2	4
3	3	4
4	2^2	4
5	5	12
6	$2 \cdot 3$	4
7	7	4
8	2^3	4
9	3^2	4
10	$2 \cdot 5$	12
11	11	4
12	$2^2 \cdot 3$	4
13	13	12
14	$2 \cdot 7$	4

Tabela 1: Število mrežnih točk na krožnici $x^2 + y^2 = r^2$

Če v koordinatni ravnini načrtamo vse premice $x = m$ in $y = n$ ter vse točke (m, n), presečišča teh premic, ko m in n tečeta po vseh celih številih, dobimo mrežo. Točke (m, n) s celoštevilskimi koordinatami imenujemo *mrežne točke*. Označimo z $N(r)$ število vseh celoštevilskih rešitev enačbe $x^2 + y^2 = r^2$ pri naravnem r. Število $N(r)$ pove, koliko točk na krožnici $x^2 + y^2 = r^2$ je mrežnih. V tabeli 1 je zbranih nekaj števil $N(r)$. Vidimo, da je njihovo zaporedje precej čudno.

Pravkar smo zgoraj našli: $N(91) = 12$. Število $N(r)$ je vedno deljivo s 4. Pravilo je v splošnem preprosto: **kvadrat polmera** r razcepimo na prafaktorje, pogledamo eksponente pri praštevilih, ki dajo pri deljenju s 4 ostanek 1, te eksponente povečamo za 1 in jih med seboj zmnožimo, rezultat pomnožimo še s 4 in dobimo število rešitev $N(r)$. V našem primeru smo imeli:

$$N(91) = N(7 \cdot 13) = 4 \cdot (2 + 1) = 12.$$

Kot je razvidno iz tabele, zaporedje števil $N(r)$ ni videti nič kaj pravilno. Po opisanem postopku hitro najdemo še

$$N(144) = N(2^4 \cdot 3^2) = 4, N(200) = N(2^3 \cdot 5^2) = 20,$$

$$N(2009) = N(7^2 \cdot 41) = 12.$$

Za število 91 iz Leporellovega seznama smo našli $N(91) = 12$. Podobno najdemo za preostala in vsoto 2065:

$$N(100) = N(2^2 \cdot 5^2) = 4 \cdot (4 + 1) = 20,$$

$$N(231) = N(3 \cdot 7 \cdot 11) = 4,$$

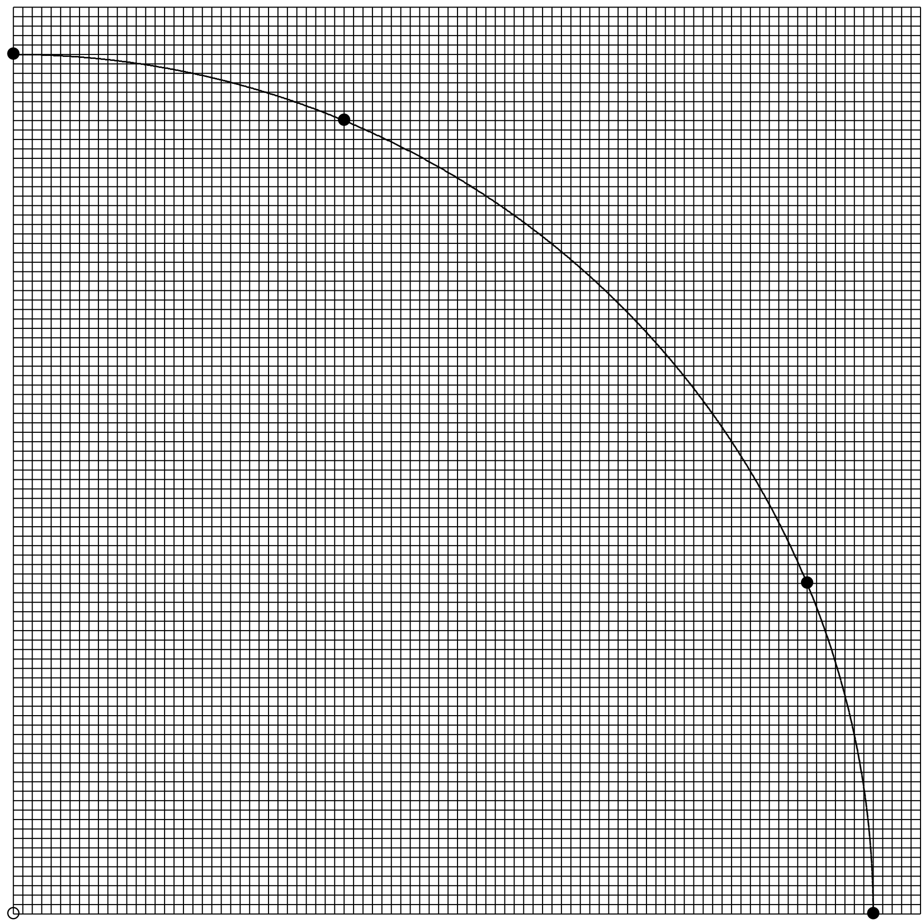
$$N(640) = N(2^7 \cdot 5) = 4 \cdot (2 + 1) = 12,$$

$$N(1\,003) = N(17 \cdot 59) = 4 \cdot (2 + 1) = 12,$$

$$N(2\,065) = N(5 \cdot 7 \cdot 59) = 4 \cdot (2 + 1) = 12.$$

Če želimo imeti veliko mrežnih točk na krožnici, moramo izbrati njen polmer r med naravnimi števili tako, da bo r imel več prafaktorjev, ki pri deljenju s 4 dajo ostanek 1. Vzemimo na primer $r = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 1\,105$. Tedaj je $N(1\,105) = 108$. Če primerno izberemo r, lahko preseže $N(r)$ vsako, še tako veliko število.

Na števila $N(r)$ se spomnimo pri vezenju z uporabo okroglega okvira, v katerega uporabnica vpne primerno tkanino, stkano z med seboj pravokotnimi nitmi. Vzemimo, da se dve niti križata točno v sredini okvira, po dve in dve niti pa sta tangenti na notranjo krožnico, ki omejuje okvir. Koliko križišč niti leži na tej krožnici? Prešteti moramo med seboj vzporedne niti od središča do tangentne niti. Če je teh r, pri čemer tiste skozi središče ne štejemo, potem je na krožnici $N(r)$ točk. Slika kaže četrtino takega okvira za $r = 91$, ko je na celotni krožnici samo 12 križišč niti. Očitno gre za preprost mrežni problem.



Slika 1: Mrežne točke na delu krožnice s polmerom $r = 91$

Ob tem nam morda pride na misel opera v dveh dejanjih *Seviljski brivec (Il Barbiere di Seviglia)*. Njen avtor je Gioacchino Rossini (1792–1868). Krstna uprizoritev opere je bila 20. februarja leta 1816 v Rimu. Libreto zanjo je napisal Cesare Sterbini (1784–1831) po Beaumarchaisovi predlogi. Seviljski brivec je del železnega repertoarja svetovnih opernih hiš.

Navedimo del pogovora med don Bartolom in njegovo varovanko Rozino, potem ko je bila skrivaj uporabila pero, črnilo in list papirja svojega gospodarja:

Bravissima! E la penna perchè fu temperata?

Rozina odvrne:

La penna! Per disegnare un fiore sul tamburo.

Rozina se kratkočasi z vezenjem, pri čemer uporablja okvir, italijansko *tamburo da ricamare*. Sledi znamenita in živahna arija Bartola: *A un dottor della mia sorte*.

2 Pitagorejski trikotniki

Trikotnik s stranicami a, b, c, izraženimi v neki dolžinski enoti z naravnimi števili, je pitagorejski, če zanj velja relacija $a^2 + b^2 = c^2$. Tak trikotnik je seveda pravokoten in omenjena relacija je ravno Pitagorov izrek. Zato tako ime. Pitagorejski trikotnik označimo kar z urejeno trojko (a, b, c). Pri tem sta a in b kateti, c pa hipotenuza pravokotnega trikotnika. Če je λ poljubno naravno število in (a, b, c) pitagorejski trikotnik, potem je pitagorejski tudi trikotnik $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$. Če števila a, b, c nimajo skupnega celoštevilskega faktorja, potem je pitagorejski trikotnik (a, b, c) primitiven. Pitagorejskih trikotnikov je nešteto, vse dobimo s formulami

$$a = m^2 - n^2\,, \quad b = 2mn\,, \quad c = m^2 + n^2,$$

pri čemer sta m in n naravni števili in $m > n$.

Če sta m in n hkrati lihi števili, potem sta vsota in razlika njunih kvadratov deljivi z 2 in po zgornjih formulah dobimo za a, b, c sama soda števila, ki ne sestavljajo primitivnega pitagorejskega trikotnika. Preostane samo še možnost, da je m sodo in n liho število ali pa m liho in n sodo število, pri tem pa sta si m in n tuji ter $m > n$. Tedaj po navedenih formulah pridemo do vseh primitivnih pitagorejskih trikotnikov.

Hitro vidimo, da ne more biti katerokoli naravno število c hipotenuza pitagorejskega trikotnika. Število c^2 mora biti namreč vsota dveh različnih kvadratov. Če je $N(c) > 4$, taki trikotniki obstajajo.

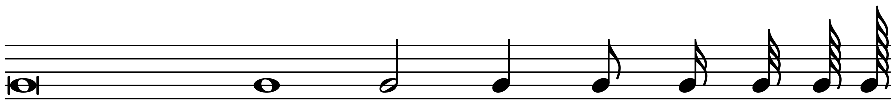
m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
4	1	15	8	17
6	1	35	12	37
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25

Tabela 2: Nekaj primitivnih pitagorejskih trikotnikov

Število $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ ne more biti hipotenuza pitagorejskemu trikotniku, ker vsi njegovi praštevilski faktorji pri deljenju s 4 dajo ostanek 3. Število 200 je lahko hipotenuza dvema pitagorejskima trikotnikoma: $(120, 160, 200)$ in $(56, 192, 200)$, če se ne oziramo na vrstni red katet. Prvi je podoben primitivnemu pitagorejskemu trikotniku $(3, 4, 5)$, drugi pa $(7, 24, 25)$.

3 Geometrijsko zaporedje

Note v glasbi so povezane z geometrijskim zaporedjem. Njihova oblika označuje čas trajanja pri petju ali igranju na inštrumentu. Note imenujemo po vrsti brevis, celinka, polovinka, četrtinka, osminka, šestnajstinka, dvaintridesetinka, štiriinšestdesetinka in stoosemindvajsetinka.



Slika 2: Osnovne note

Note na sliki 2 ustrezajo geometrijskemu zaporedju

$$\frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}.$$

Lahko pa bi zaporedje not in ustreznih ulomkov teoretično še nadaljevali.

Geometrijsko zaporedje je bilo v matematiki že od nekdaj zanimivo. Spomnimo se na primer na Ahila (Ἀχιλλεύς) in želvo, na izumitelja šahovske igre in nagrade, ki jo je zahteval, na obrestno obrestni račun in na debeline, ki jih dobivamo s prepogibanjem papirja.

Števila $a_0, a_1, a_2, \ldots$, različna od 0, sestavljajo geometrijsko zaporedje, če je količnik naslednjega člena z njegovim predhodnikom vselej isti. Vzemimo, da je enak številu q. To pomeni $a_1/a_0 = q, a_2/a_1 = q, a_3/a_2 = q, \ldots$ To lepše zapišimo v obliki:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Iz tega takoj ugotovimo, da je geometrijsko zaporedje popolnoma določeno z začetnim členom a_0 in številom q, ki mu pravimo količnik ali kvocient geometrijskega zaporedje. člen a_1 je q-kratnik začetnega člena, torej $a_1 = a_0 q$, člen a_2 je q-kratnik člena a_1, torej $a_2 = a_1 q = a_0 q^2$. Tega ni težko posplošiti in ugotovimo:

$$a_n = a_0 q^n \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Geometrijsko zaporedje je torej oblike:

$$a_0, a_0 q, a_0 q^2, a_0 q^3, \ldots$$

Od kod zaporedju prilastek *geometrijsko*? V primeru pozitivnega geometrijskega zaporedja je vsak člen, razen začetnega, geometrijska sredina svojega neposrednega levega in desnega soseda:

$$\sqrt{a_{n-1} a_{n+1}} = \sqrt{a_0 q^{n-1} \cdot a_0 q^{n+1}} = \sqrt{a_0^2 q^{2n}} = a_0 q^n = a_n \quad \text{za} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Primeri: V vseh primerih naj bo $a_0 = 1$. Sicer bi vse člene zaporedij samo pomnožili z a_0.

Za $q = 2$ imamo: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Za $q = -2$ imamo: $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

Za $q = \frac{1}{2}$ imamo: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Za $q = -\frac{1}{2}$ imamo: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Za $q = 1$ imamo: $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

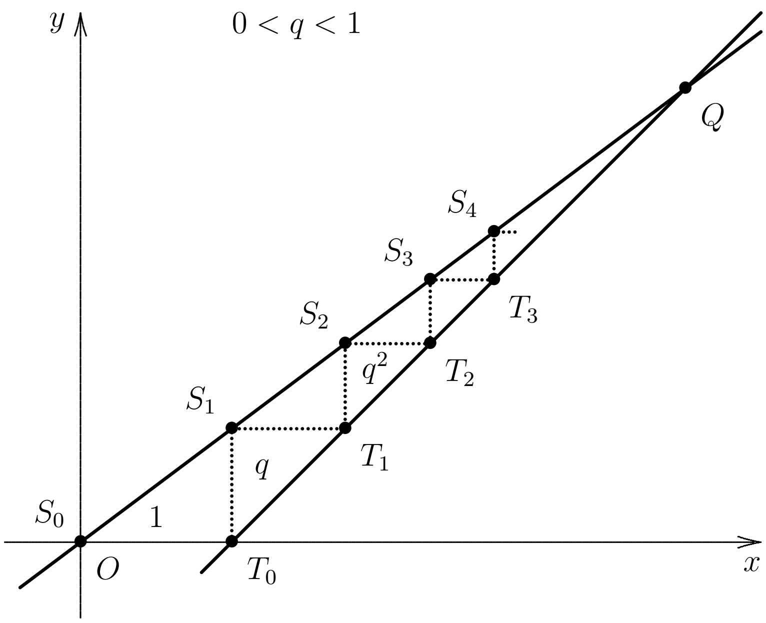
Za $q = -1$ imamo: $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

Za $q = 0.1$ imamo: $1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots$

Stari Grki so imeli zelo radi geometrijo. Spomnimo se samo na Talesa, Pitagoro, Evklida in Apolonija. Po grško so po vrsti: Θαλῆς, Πυθαγόρας, Εὐκλείδης, Ἀπολλώνιος. Matematične rezultate so si skušali razložiti geometrijsko. Poglejmo, kako bi si predočili geometrijsko zaporedje $1, q, q^2, q^3, \ldots$ v analitični geometriji. Torej z nekoliko sodobnejšimi pripomočki. Še več, podobno bomo obravnavali tudi geometrijsko vrsto

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots, \tag{1}$$

vrsto, katere členi sestavljajo geometrijsko zaporedje. Obravnavo najprej



Slika 3: Vsota geometrijskega zaporedja s kvocientom $0 < q < 1$

posvetimo primeru, ko je $0 < q < 1$. V pravokotnem koordinatnem sistemu narišemo premici $y = qx$ in $y = x - 1$. Prva poteka skozi koordinatno izhodišče $O = S_0$ pod kotom, katerega tangens je ravno q. Naklonski kot te premice je torej v obravnavanem primeru manjši kot 45°. Druga premica seka abscisno os v točki $T_0(1, 0)$ pod kotom 45° (slika 3).

Obe premici se sekata v točki $Q(1/(1-q), q/(1-q))$. Do tega rezultata pridemo, če rešimo sistem enačb $y = qx, y = x - 1$. Skozi T_0 postavimo na os x pravokotnico, ki seka premico $y = qx$ v točki S_1. Skozi S_1 potegnemo osi x vzporednico, ki seka premico $y = x - 1$ v točki T_1. Opisani postopek nadaljujemo, kot kaže slika. Dobimo zaporedje točk $T_0, T_1, T_2, \ldots$ na premici $y = x - 1$ in zaporedje točk $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ na premici $y = qx$. Točka S_1 ima koordinati $(1, q)$. Ker je trikotnik $T_0S_1T_1$ pravokoten in enakokrak, velja $S_1T_1 = q$. Zato ima točka T_1 za q večjo absciso kot T_0, torej sta $(1+q, q)$ koordinati točke T_1, $(1+q, q+q^2)$ pa koordinati točke S_2. Ker je trikotnik $T_1S_2T_2$ tudi pravokoten in enakokrak, ima T_2 za q^2 večjo absciso kot T_1, torej sta koordinati za T_2 enaki $(1+q+q^2, q+q^2)$. Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled in dobimo zaporedji točk

$$T_0(1,0), T_1(1+q,q), T_2(1+q+q^2, q+q^2), T_3(1+q+q^2+q^3, q+q^2+q^3), \ldots$$

in

$$S_0(0,0), S_1(1,q), S_2(1+q, q+q^2), S_3(1+q+q^2, q+q^2+q^3), \ldots$$

Splošno velja:

$$T_n(1+q+q^2+\ldots+q^n, q+q^2+\ldots+q^n) \quad \text{za} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

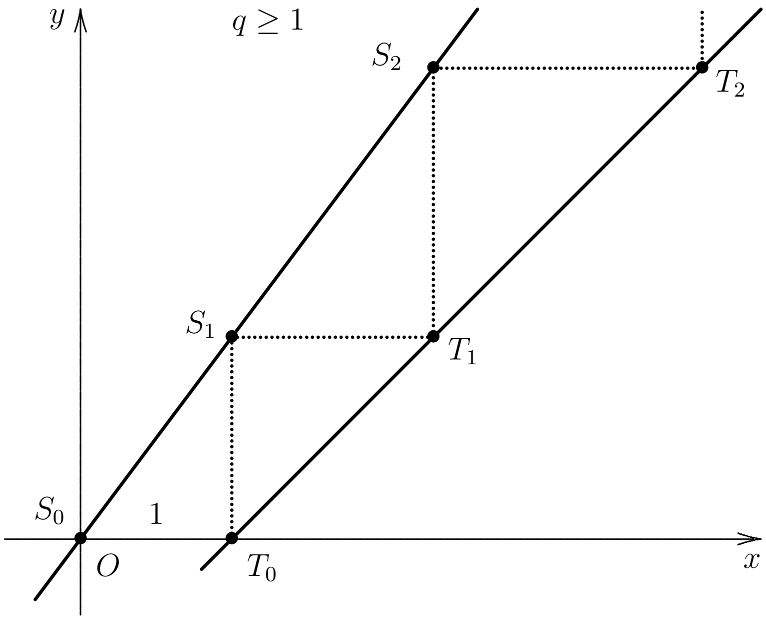
in

$$S_n(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}, q+q^2+\ldots+q^n) \quad \text{za} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Daljica S_0T_0 ima dolžino 1, daljica S_1T_1 dolžino q, daljica S_2T_2 dolžino q^2. V splošnem ima daljica S_nT_n dolžino q^n za $n = 0, 1, 2, \ldots$ Točke v zaporedjih $T_0, T_1, T_2, \ldots$ in $S_0, S_1, S_2, \ldots$ se bližajo točki Q. Če je indeks n dovolj velik, sta točki T_n in S_n tako blizu točki Q, kot želimo. To pa pomeni, da sta abscisa (ordinata) točke T_n za dovolj velik indeks n poljubno blizu abscisi (ordinati) točke Q. Iz tega sklepamo:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots = \frac{1}{1-q} \qquad \left(q+q^2+q^3+q^4+\ldots = \frac{q}{1-q}\right).$$

Za $0 < q < 1$ ima vrsta (1) končno vsoto, enako $1/(1-q)$. Na sliki opazimo zaporedje daljic, od T_0 navpično do S_1, nato vodoravno do T_1, pa spet navpično do S_2, nato vodoravno do T_2 in tako naprej, vedno izmenoma s premice $y = x - 1$ na premico $y = qx$ in spet na premico $y = x - 1$. Za $0 < q < 1$ smo dobili stopničasto krivuljo, ki nas pripelje od T_1 do Q, kjer se premici sekata. Za $q = 1$ sta premici $y = x - 1$ in $y = qx$ vzporedni



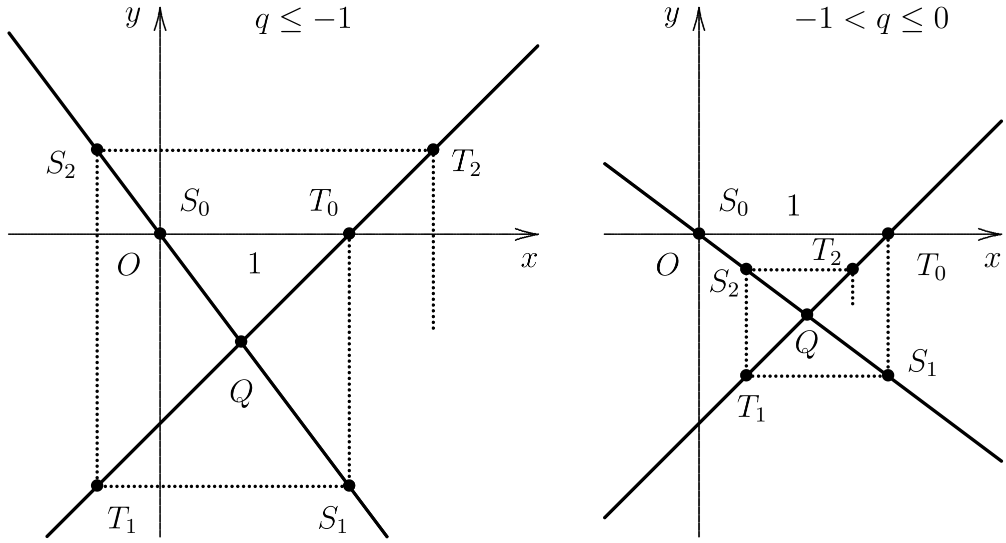
Slika 4: Vsota geometrijskega zaporedja s kvocientom $q \geq 1$

in nimata presečišča, vrsta (1) nima končne vsote. Za $q > 1$ ali $q < -1$ se premici sicer sekata, toda prej opisana krivulja skozi $T_0S_1T_1S_2\ldots$ ne vodi do njunega presečišča (slika 4). Za $q = -1$ se premici sekata pravokotno in dobimo krivuljo, ki je navita na kvadrat z oglišči $(0,0), (1,0), (1,-1), (0,-1)$ in se ne približuje presečišču $Q(1/2, -1/2)$.

Za $-1 < q < 0$ dobimo zopet zanimivo krivuljo, in sicer spiralo, ki se ovija okoli točke $Q(1/(1-q), q/(1-q))$ in se ji poljubno približa (slika 5). Vrsta (1) tudi tedaj konvergira in ima vsoto $1/(1-q)$. Tudi za $q = 0$ ima vrsta, ki ni geometrijska po naši opredelitvi, vsoto, in sicer 1. Vrsta (1) za $|q| < 1$, kot učeno pravimo, konvergira in ima vsoto $1/(1-q)$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{za} \quad |q| < 1.$$

S tem smo pregledali vse možnosti za realen kvocient q v geometrijski vrsti. K taki vrsti se bomo še vračali, saj je preprosta in jo še kar obvladamo.



Slika 5: Vsota geometrijskega zaporedja s kvocientom $q < 0$

Geometrijska vrsta je včasih uporabna tudi za to, da njene člene primerjamo s členi kakšne druge vrste, za katero bi radi vedeli, če je konvergentna ali ne. Na tem so zasnovani tako imenovani konvergenčni kriteriji, s katerimi včasih razvozlamo konvergenco vrste, čeprav njene vsote morda niti ne moremo zapisati v zaključeni obliki.

Potence števil, ki so večja kot 1, naraščajo in pri dovolj velikem eksponentu n hitro presežejo še tako veliko pozitivno število. Denimo, da si je nekdo pred 2 000 leti od apostola Petra izposodil 1 g čistega zlata in da ga mora, potem ko se je skoraj toliko časa cvrl v vicah, ob prihodu v nebesa vrniti nebeškemu ključarju v istovrstnem zlatu z obrestmi vred. Denimo, da je letna obrestna mera samo 1 %. Po 2 000 letih se bo dolga nabralo kar precej:

$$1.01^{2\,000}\ \mathrm{g} = 439\,286\,204.9\ \mathrm{g} = 439\,286.2\ \mathrm{kg}.$$

To še zdaleč ni malo, saj je dobrih 439 ton. Iz tega bi lahko ulili precej zlatih telet. Kocka, ki bi jo ulili iz tega zlata, pa bi imela pri sobni temperaturi rob z dolžino 283 cm. Za prevoz takega tovora bi potrebovali 57 kamionov z nosilnostjo 7.7 ton. Če bi vsi ti tovornjaki vozili vsaksebi po 50 metrov, bi imeli konvoj dolžine skoraj 3 km, kar je malo manj, kot je po cesti od Cerknega skozi Benat do Mihona v Zakrižu.

Lahko bi zlobno pripomnili, da je v posvetnem življenju še dobro, da civilizacije propadajo in se vsake toliko časa vse začne znova. Kaj bi šele bilo, če bi sv. Peter v omenjenem primeru zahteval dvakrat višje obresti? Spokornik bi mu bil ob prihodu v raj dolžan 158 614 732 700 ton čistega zlata, kar je nepredstavljivo mnogo, skoraj 159 milijard ton, kar je mnogo manj od mase pošteno velikega asteroida, toda za prevoz bi potrebovali skoraj 21 milijard tovornjakov z nosilnostjo 7.7 ton. Kocka, ki bi jo ulili iz tega zlata, pa bi imela pri sobni temperaturi rob dolžine 2018 m. Če bi vsi ti tovornjaki vozili vsaksebi po 50 metrov, bi dobili konvoj dolžine dobre milijarde kilometrov, kar je nekoliko manj kot pot, ki jo prepotuje Zemlja okoli Sonca v enem letu, in malo več, kot je razdalja od Sonca do Jupitra. Tako razdaljo prepotuje svetloba v slabi uri. Na svetu pa je po ocenah komaj od 120 000 do 140 000 ton zlata. Nekaj pa ga je še v naravi.

Celotno zlato bogastvo vseh bank in zakladnic Zemlje navsezadnje ni vredno niti milijoninke dolga, ki bi se v 2 000 letih nabral našemu hipotetičnemu grešniku, ki je pri prvem papežu vzel posojilo v obliki 1 grama zlata pri obrestni meri 2 %. Koliko je 1 gram zlata, če iz njega ulijemo kocko? Kocka bi imela rob 3.73 mm. Če bi naredili iz nje kroglico, bi le-ta imela premer 4.62 mm.

Težko si predstavljamo, kakšne ogromne številke bi šele dobili pri bolj oderuških obrestnih merah, recimo 3 %, 4 %, 5 %? Masa zlata bi bila primerljiva z največjimi zvezdami v vesolju. Čudnega ni nič, če ljudje težko vrnejo dolg po nekaj letih, če je obrestna mera 10 %, 20 %. Ali je potemtakem kaj čudnega, če na tem svetu gre vse narobe? Ni se odveč spomniti besed v molitvi Oče naš:

> *Et dimitte nobis debita nostra*
> *sicut et nos dimittimus debitoribus nostris.*
>
> *In odpusti nam naše dolge,*
> *kakor tudi mi odpuščamo svojim dolžnikom.*
>
> Καὶ ἄφες ἡμῖν τὰ ὀφειλήματα ἡμῶν,
> ὡς καὶ ἡμεῖς ἀφήκαμεν τοῖς ὀφειλέταις ἡμῶν.

Z eksponentno funkcijo se ne kaže igrati. Naftni derivati spreminjajo ceno, največkrat navzgor, vsake dva tedna. Liter najbolj uporabljenega 95-oktanskega bencina se je za potrošnika 2. aprila 2012, ko je stal 1.493 evra, podražil za okoli 2.344 %. Kam pridemo, če bi se bencin podražil vsakih štirinajst dni za toliko odstotkov? Na novega leta dan 2013 bi liter stal kar

$$1.493 \cdot 1.02344^{19} = 2.3188$$

evra, leto kasneje pa že 4.2356 evra. Koliko bi bili na boljšem, če bi se bencin podražil vsakih štirinajst dni samo za 1 %? Za novo leto 2013 bi en liter stal 1.8037 evra, leto kasneje pa že 2.3363 evra.

Ljudje najraje razmišljajo linearno in jim je eksponentna rast španska vas. Ali pa si pred njo zatiskajo oči oziroma tiščijo glavo v pesek. V svetu denarništva veljajo popolnoma drugačni zakoni kot pri plačevanju kave, kjer vemo, da ena kava s smetano stane 1.20 evra, dve kavi 2.40 evra, deset kav pa 12 evrov.

Velika števila je avtor prvič v življenju srečal in se jih zavedal, ko mu je v gimnazijskih letih prišla v roke knjiga [3], *Od poštevanke do integrala: Matematika za vsakogar*, ki jo je napisal avstrijski pisatelj Egmont Colerus von Geldern (1888–1939). Naslov originala je *Vom Einmaleins zum Integral: Mathematik für Jederman*. V slovenščini je izšla leta 1951 pri Mladinski knjigi v Ljubljani. Izvod knjige je za šolsko nagrado prejel Anton Primožič, nekoč uspešen dijak idrijske gimnazije, uspešen tekmovalec v znanju matematike in kasnejši študent tehnične matematike in eden njenih prvih diplomantov na ljubljanski univerzi. Knjigo je avtorju posodila njegova, žal že pokojna sestra. Colerus je napisal še nekaj matematično zgodovinskih del, na primer *Od Pitagore do Hilberta* in *Od točke do četrte dimenzije*. Ker je skupaj z nemškimi pisatelji v Avstriji v neki izpovedi pozdravil Anschluss, je prišel na slab glas, tako da njegovih knjig nekaj časa niso izdajali. Kaj je kljubovalo temu, da je delo *Od poštevanke do integrala* že leta 1951 izšlo v nekdanji Jugoslaviji, kjer je bila navada, da so marsikaterega pisatelja ali pesnika, ki ni bil med vojno na pravi strani, preprosto zamolčali ali celo prepovedali?

Kakorkoli že, Colerus daje v knjigi *Od poštevanke do integrala* primer gromozansko velikega števila v zvezi s šahovsko desko, ki ima 64 polj, izmenično črnih in belih. Šah mi nikoli ni bil priljubljen, tako kot ne skakanje čez kozo ali konja pri telovadbi. Legenda pravi, da je šah izumil nekje sredi prvega tisočletja nekje v Indiji neki Sisa Ben Dahir (v imenu si strokovnjaki niso enotni) in da je bila nova igra kralju Širamu tako všeč, da so morali nemudoma poiskati avtorja in ga pripeljati pred kralja. Ta ga je spraševal, kaj naj mu za izum podari. Sisa se je nekaj časa izmotaval, da nič, nazadnje, ko kralj nikakor ni odnehal, si je zaželel, naj mu na prvo polje šahovske deske položijo eno pšenično zrno, na drugo dve, na tretje štiri, na vsako naslednje dvakrat več kot na prejšnje, vse do štiriinšestdesetega polja. Morda je šlo za riževa zrna, kar pa za zgodbo ni tako bistvenega pomena kot njihovo število. Nekateri, vključno s Colerusom, menijo, da je Sisa barantal samo za število zrn na zadnjem polju, to je *samo*

$$Z' = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$$

zrn, drugi pa imajo v mislih vsa zrna, sešteta od prvega polja do zadnjega. Kralj je menil, da v nobenem primeru zrnja ne bo niti za pošteno potico. Na dvoru so nekaj časa računali in izračunali, da si Sisa, po drugi inačici zgodbe, želi natančno

$$Z = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$$

pšeničnih zrn. Kako to hitro izračunati, brez že izpeljanih formul, je po svoje tudi zanimivo, vsaj tako kot seštevanje mladega Gaußa? Potrebna je majhna zvijača. Najprej zapišemo

$$2Z = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} + 2^{64},$$

nato pa še

$$Z = 2Z - Z = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} - 1 - 2 - 4 - 8 - \ldots - 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

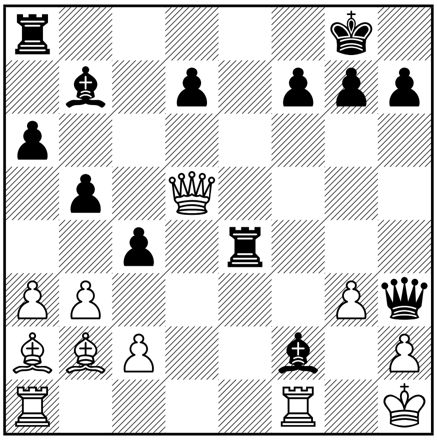
Množiti z 2 ni težko in dvorni matematiki so izračunali

$$Z = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

To število je nekdo kralju tudi naglas prebral. Če Z razstavimo na prafaktorje, dobimo:

$$Z = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 641 \cdot 65537 \cdot 6700417.$$

Toliko pšeničnih zrn je več kot vsa zaloga pšenice na Zemlji. Ko se je kralj tega zavedel, je baje ukazal Sisu, naj si jih kar sam našteje. Revež bi $2^{64} - 1$ zrn štel 584.5 milijarde let, če bi vsako sekundo vzel eno zrno in zraven še izgovoril ustrezni glavni števnik. Število Z' je prav tako ogromno, saj je $Z' = (Z + 1)/2$ in se količini žita po eni in drugi inačici med seboj ne razlikujeta bistveno.



Slika 6: Beli je na potezi

Koliko pa je vse pšenice skupaj v tej nagradi? Če vsako zrno tehta 40 miligramov, je žita 737.87 milijard ton. Če bi vse žito naložili na tovornjake, od katerih bi ga vsak prevažal 7.7 ton, bi potrebovali 95.8 milijard takih vozil. Njihov konvoj bi bila dolg od Sonca (☉) do Plutona (♇), če bi na vsake 62 metrov stal en tovornjak. Kljub temu pa je število zrn pravi pritlikavec v primerjavi z najmanjšo rešitvijo Pellove enačbe, ki jo navajajo pri Arhimedovem problemu o govedu. Še vedno pa je ogromno.

Beseda *šah* je perzijska, pomeni pa *kralj*, شاه. Tako kot indijske številke so tudi šah posredovali Evropi Arabci, ki šahu pravijo *šatrandž*, zapišejo pa s svojimi črkami, seveda od desne proti levi, kot شطرنج. Cilj šahovske igre je matirati nasprotnika. Izraz *šah-mat* je perzijski in pomeni *smrt kralju*, شاه مات. Ker se pri igranju šaha pogosto uporablja izraz *šah-mat*, so Rusi izumili za šah besedo шахматы. Angleži uporabljajo za šah besedo *chess*, Francozi *échecs*, Italijani *scacchi*, Španci *ajedrez*, Katalonci *escacs*, Luzitanci *xadrez*, Romuni *şah*, Madžari *sakk*, Turki *satranç*, Finci *shakki*, Hindujci

शतरंज, v sanskrtu चतुरङ्ग in še bi lahko naštevali.

Tudi šahovske figure imajo zanimiva imena. Na primer *kmet*: angleško *pawn*, nemško *Bauer*, rusko пешек, italijansko *pedone*, turško *piyon*, špansko *péon*, katalonsko *peó*, portugalsko *peão*, finsko *sotilas*, arabsko جنود, hindujsko प्यादा.

Precej manj gromozansko veliko število je na svojevrsten način zabeleženo tudi v opisu pesniškega dvoboja med Hesiodom in Homerjem, Ἡσιόδου καὶ Ὁμήρου ἀγών). Neznani pisatelj piše o tem tekmovanju, ki je potekalo v Halkidi, grško Χαλκίς na otoku Evboja, grško Εὔβοια, ob pogrebnih obredih tamkajšnjega kralja Amfidamanta, Ἀμφιδάμας, ki jih je priredil njegov sin Ganyktor, Γανύκτωρ, pokojnikov brat Paneides, Πανείδης, pa je bil prisoten med razsodniki.

Potem ko sta se slavna pesnika temeljito obdelovala tako, da sta se izmenoma dopolnjevala z do potankosti izpiljenimi heksametri in je Hesiod spet prišel do besede:

> Τοῦτό τι δή μοι μοῦνον ἐειρομένῳ κατάλεξον,
>
> πόσσοι ἅμ᾽ Ἀτρεΐδησιν ἐς Ἴλιον ἦλθον Ἀχαιοί;
>
> *Zdaj pa mi daj odgovor samo še na tole vprašanje:*
> *Koliko mož je Atridoma v boj nad Trojo sledilo?*

Atrida sta bila Agamemnon, Ἀγαμέμνων, in Menelaj, Μενέλαος, Atrejeva sinova. Atrej, Ἀτρεύς, je bil kralj starodavnih Miken. Agamemnon je bil kralj v Mikenah, njegov brat Menelaj pa v Sparti. Spomnimo, trojanska vojna se je vnela zaradi lepe Helene, Ἑλένη, Menelajeve soproge, ki jo je ugrabil Trojanec Paris, Πάρις.

Na vprašanje, koliko mož se je šlo z Atridoma borit za lepo Heleno pred Trojo, je Homer Hesiodu pri priči takole bistroumno odgovoril:

> Πεντήκοντ᾽ ἦσαν πυρὸς ἐσχάραι, ἐν δὲ ἑκάστῃ
>
> πεντήκοστ᾽ ὀβελοί, περὶ δὲ κρέα πεντήκοντα·
>
> τρὶς δὲ τριηκόσιοι περὶ ἓν κρέας ἦσαν Ἀχαιοί.

Petdeset ognjev gorelo je, petdeset ražnjev ob ognju,
petdeset kosov mesa se cvrlo na vsakem je ražnju,
trikrat po tri sto Ahajcev se s kosom mesa je gostilo.

Ražnjev je torej bilo 2 500. Na njih se je cvrlo 125 000 kosov mesa. Če se je 900 Ahajcev mastilo z enim kosom mesa, jih je torej bilo 112 500 000. Toliko v tistih časih, v 12. stoletju p.n.e., ni bilo vseh ljudi na svetu. Ob začetku našega štetja jih je bilo po grobih ocenah okoli 250 milijonov. Lahko pa le rečemo, da so to le števila, ki se jih še nekako predstavljamo, medtem ko si omenjeno število zrn na šahovski deski, to je

$$Z = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

nekoliko teže, da o še večjih raje ne govorimo.

Na koncu so strogi razsodniki zmago kljub drugačnemu mnenju navzoče publike, ki ni mogla prehvaliti Homerja, pripisali Hesiodu, češ da lepo poje o poljedelstvu in miru, Homer pa najraje opeva samo krvave boje. Za nagrado je Hesiod prejel umetelno izdelan bronast trinožnik, ki ga je posvetil Muzam in nazadnje poklonil slavnemu preročišču v Delfih. Nanj je dal napisati naslednja heksametra:

Ἡσίοδος Μούσαις Ἑλικωνίσι τόνδ᾽ ἀνέθηκεν
ὕμνῳ νικήσας ἐν Χαλκίδι θεῖον Ὅμηρον.

V Halkidi nekdaj Hesíod je z verzi premagal Homerja,
svojo nagrado v spomin helikonskim je Muzam poklonil.

Stari Grki so imeli, po pripovedovanju njihovih sodobnikov, tako zelo radi poezijo, da so komaj čakali na to, da bo kdo kje recitiral pesmi ali priredil pesniško tekmovanje. Od vsepovsod so baje kar drli na take prireditve, kjer so uživali ob umetniški besedi.

Prava poslastica na gimnaziji pa je bilo pretvarjanje neskončno periodičnih decimalnih števil v ulomke. Število $x = 1.333\ldots$ lahko razumemo kot vsoto neskončne vrste

$$x = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots,$$

v kateri spoznamo geometrijsko vrsto s kvocientom $q = 1/10$ in prvim členom 3/10. Zato je

$$x = 1 + \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{3}{9} = \frac{4}{3}.$$

V tem primeru nam je profesor pokazal krajšo pot: izrazil je iz decimalnega zapisa $10x = 13.333\ldots$ in odštel: $10x - x = 9x = 12$. Iz tega imamo takoj $x = 4/3$ brez opletanja in telovadbe z geometrijsko vrsto. Včasih je treba dano število pomnožiti s kako naravno potenco desetice. To je odvisno od tega, kako dolga je perioda danega decimalnega števila.

Vzemimo za primer $x = 2.\overline{35}$. Črta nad 35 pove, da se 35 ponavlja. Takoj ugotovimo, da je dobro izračunati $100x = 235.\overline{35}$. Ko enačbi odštejemo, imamo: $99x = 233$ in zato je $x = 233/99$.

Če pa ima število predperiodo, pridemo do rezultata v dveh korakih, na primer: $x = 13.23\overline{71}$. Če to število pomnožimo s 100, dobimo število prejšnjega tipa: $100x = 1\,323.\overline{71}$. Nato imamo $10\,000x = 132\,371.\overline{71}$ in po odštevanju: $9\,900x = 131\,048$ in nazadnje $x = 131\,048/9\,900 = 32\,762/2\,475$.

4 Geometrijsko zaporedje v glasbi

Geometrijsko zaporedje srečamo tudi v glasbi. Tako imenovana enakorazmerno temperirana tonska lestvica, nad katero se je navduševal Johann Sebastian Bach (1685–1750), ima 12 tonov:

$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5, \nu_6, \nu_7, \nu_8, \nu_9, \nu_{10}, \nu_{11}.$$

Tonu ν_{11} sledi ton ν_{12}, ki je za oktavo višji od tona ν_0. Ton ν_{12} je začetek nove lestvice. Splošno velja: če ima neki ton frekvenco ν, potem ima za oktavo višji ton frekvenco 2ν. V glasbi so pomembni intervali, ki povedo razmerja frekvenc tonov, ne pa razlike frekvenc. Dvanajsttonska lestvica v frekvencah je takšna:

$$\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \nu_4 < \nu_5 < \nu_6 < \nu_7 < \nu_8 < \nu_9 < \nu_{10} < \nu_{11} < \nu_{12} = 2\nu_0.$$

Pri tem morajo biti pri enakorazmerno temperirani tonski lestvici vsa razmerja dveh zaporednih frekvenc konstantna:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{\nu_4}{\nu_3} = \frac{\nu_5}{\nu_4} = \frac{\nu_6}{\nu_5} = \frac{\nu_7}{\nu_6} = \frac{\nu_8}{\nu_7} = \frac{\nu_9}{\nu_8} = \frac{\nu_{10}}{\nu_9} = \frac{\nu_{11}}{\nu_{10}} = \frac{\nu_{12}}{\nu_{11}} = \alpha.$$

Če vseh 12 enačb med seboj pomnožimo, dobimo:

$$\frac{\nu_{12}}{\nu_0} = \frac{2\nu_0}{\nu_0} = 2 = \alpha^{12}.$$

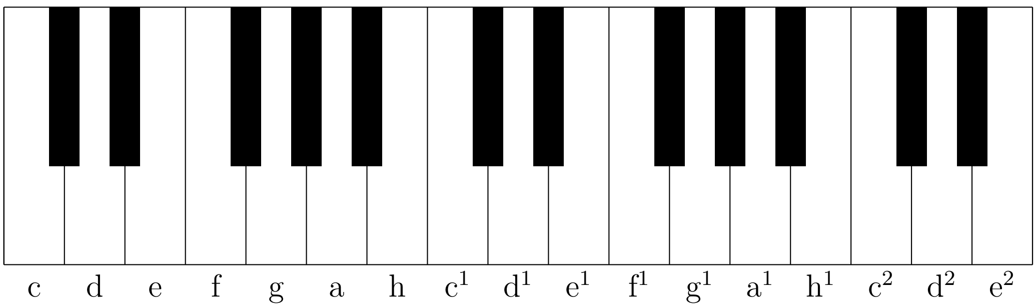
Iz tega izračunamo

$$\alpha = \sqrt[12]{2} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2}}} = 1.0594630943593\ldots$$

Število α je iracionalno. Zanj najdemo bolj ali manj natančne racionalne približke, na primer

$$\alpha \approx \frac{196}{185} = 1.05\overline{945}.$$

Enakorazmerno temperirana tonska lestvica ima vse intervale med dvema zaporednima tonoma enake, številsko $\sqrt[12]{2}$. S tako lestvico smo zgradili enakorazmeren tonski sistem. Enakorazmerno temperirano tonsko lestvico lahko nadaljujemo tudi nazaj, tako da gremo na nižje tone. Ni pa treba pretiravati, kajti človeško uho zazna tone od približno 16 Hz do približno 16 000 Hz, to je v razponu 10 oktav.



Slika 7: Klaviatura

Za normalni ton so določili ton a^1, ki ima frekvenco 440 Hz, ki jo vzamemo za ν_0 v naših oznakah. Toni v obe smeri so potem po frekvencah

$$\ldots, \alpha^{-3}\nu_0, \alpha^{-2}\nu_0, \alpha^{-1}\nu_0, \nu_0, \alpha\nu_0, \alpha^2\nu_0, \alpha^3\nu_0, \ldots,$$

v splošnem

$$\nu_m = \alpha^m \nu_0 \qquad (m \in \mathbb{Z}).$$

Za $m = -58$ dobimo $\nu_{-57} = 15.43$ Hz, kar je okoli najnižje frekvence, ki jo človeško uho še zazna, za $m = 62$ pa $\nu_{62} = 1\,580.42$ Hz, kar je okoli najvišje frekvence, ki jo človeško uho še zazna. Ker je

$$\frac{\nu_{62}}{\nu_{-58}} = 2^{10},$$

je ustrezen razpon res 10 oktav.

Slika 8: Zapisa enakorazmerno temperirane lestvice – navzgor in navzdol

Seveda pa nastane vprašanje, kako se sliši glasba, zaigrana na inštrumentu, ki je uglašen po enakomerno temperirani lestvici, ki je sicer matematično idealna. Iz splošne formule $\nu_m = \alpha^m \nu_0$ dobimo

$$\nu_{m+12} = \alpha^{m+12}\nu_0 = \alpha^m \alpha^{12} \nu_0 = 2\alpha^m \nu_0 = 2\nu_m$$

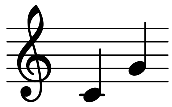
za vsak $m \in \mathbb{Z}$. Po dvanajstih poltonih štetih navzgor (navzdol) v taki lestvici pridemo kjerkoli na ton, ki je za oktavo višji (nižji).

Zelo pomembna je višina tona g v primerjavi z višino tona c. V našem primeru je razmerje

$$\frac{\alpha^{-9}\nu_0}{\alpha^{-2}\nu_0} = \alpha^7 = \sqrt[12]{128} = 1.498307076.$$

To število se kar dobro ujema s klasično čisto kvinto, za katero je razmerje $3/2 = 1.5$.

Beseda *ton* je grškega izvora. Izhaja iz besede τόνος, kar ima več pomenov, na primer vse tisto, kar je napeto, vrv, struna, glas, zvok.



Slika 9: Čista kvinta do–sol

Ton ↓	Hz	↑ Ton
c^1	261.63	c^1
cis^1	277.18	des^1
d^1	293.66	d^1
dis^1	311.13	es^1
e^1	329.63	e^1
f^1	349.23	f^1
fis^1	369.99	ges^1
g^1	392.00	g^1
gis^1	415.30	as^1
a^1	440.00	a^1
ais^1	466.16	b^1
h^1	493.88	h^1
c^2	523.25	c^2
cis^2	554.37	des^2
d^2	587.33	d^2
dis^2	622.25	es^2
e^2	659.26	e^2
f^2	698.46	f^2
fis^2	739.99	ges^2
g^2	783.99	g^2
gis^2	830.61	as^2
a^2	880.00	a^2
ais^2	932.33	b^2
h^2	987.77	h^2
c^3	1046.50	c^3

Tabela 3: Toni enakorazmerno temperirane lestvice

5 Geometrijsko zaporedje v geometriji

V enakostranični trikotnik včrtamo krog, na katerega konstruiramo tangento, ki je vzporedna eni od stranic trikotnika. V nastali manjši trikotnik zopet včrtamo krog in opisan postopek nadaljujemo v nedogled. Kolikšna je vsota vrste, katere členi so zaporedni polmeri včrtanih krogov?

Naj ima dani enakostranični trikotnik stranico $a = a_1$. Njegova višina je $v_1 = v = a\sqrt{3}/2$, polmer ϱ_1 včrtanega kroga pa tretjina te višine: $\varrho_1 = v/3 = a_1\sqrt{3}/6$. Višinska točka trikotnika in dotikališče tangente, ki je na višino pravokotna, razdelita višino na tri enake dele, zato je višina manjšega trikotnika enaka $v_2 = v_1/3$. Manjši trikotnik je tudi enakostraničen, saj se z večjim ujema v dveh kotih. Stranica manjšega trikotnika je torej $a_2 = a_1/3$. Torej je polmer manjšemu trikotniku včrtanega kroga $\varrho_2 = \varrho_1/3$. Postopek nadaljujemo in najdemo polmere trikotnikom včrtanih krogov: $\varrho_3 = \varrho_2/3, \varrho_4 = \varrho_3/3, \ldots$ Polmeri sestavljajo geometrijsko zaporedje s kvocientom $1/3$. Vsota vseh členov tega zaporedja pa je:

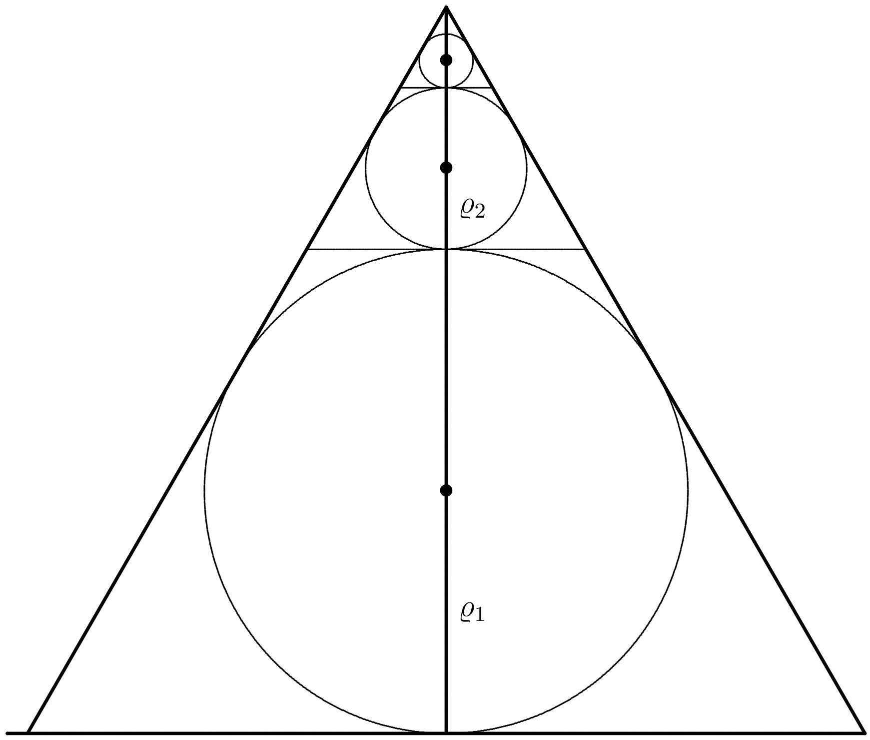
$$S = \varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \ldots = \varrho_1 + \frac{\varrho_1}{3} + \frac{\varrho_1}{3^2} + \ldots = \varrho_1 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{v}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{v}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vsota vseh polmerov je torej ravno polovica višine danega enakostraničnega trikotnika.

Pri naslednji nalogi vzamemo kvadrat s stranico 1, nato ga z daljicami, vzporednimi stranicam, razdelimo na 9 skladnih kvadratov. Srednji kvadrat pobarvamo. Preostale kvadrate razdelimo spet na 9 skladnih kvadratov po enakem postopku, kot smo naredili s prvotnem. Srednje kvadratke pobarvamo. Preostale pa spet razdelimo na 9 še manjših kvadratov, srednje pobarvamo in postopek nadaljujemo v nedogled. Kolikšna je skupna ploščina vse pobarvanih kvadratov?

Na prvem koraku je ploščina srednjega kvadrata $S_1 = (1/3)^2$. Preostane 8 kvadratov, v katerih ima srednji kvadrat ploščino $(1/9)^2$, skupna ploščina teh pa je $S_2 = 8(1/9)^2$. V naslednjem koraku pobarvamo po tem postopku



Slika 10: Zaporedje enakostraničnih trikotnikov

kvadrate s ploščino $(1/27)^2$. Koliko je teh kvadratov, pove število še nepobarvanih s ploščino $(1/9)^2$, to se pravi

$$\frac{1-(1/3)^2-8(1/9)^2}{(1/9)^2}=64.$$

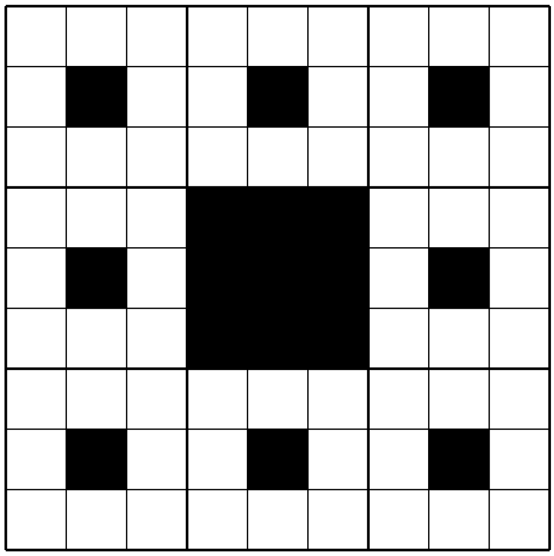
Skupna ploščina kvadratov s ploščino $(1/27)^2$ je torej $S_3 = 64(1/27)^2$. Sedaj ni težko posplošiti izraza za ploščino pri n-tem deljenju, ko imajo kvadrati ploščino $(1/3^n)^2$. Teh kvadratov je 2^{3n-3}, tako da je ploščina takih $S_n = 2^{3n-3}(1/3^n)^2$.

Vsoto S vseh pobarvanih kvadratov izrazimo kot vsoto geometrijske vrste:

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{3k-3}}{3^{2k}}=\frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^k=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{8}{9}}=1.$$

Kvadrat tako postaja vedno bolj pobarvan.

Tovrstnih nalog iz geometrije, pri katerih se pojavi geometrijska vrsta, je zbranih veliko po srednješolskih učbenikih in zbirkah nalog.



Slika 11: Zaporedje kvadratov

6 Kompleksna geometrijska vrsta

Kompleksna števila nam pomagajo rešiti marsikatero nalogo v zvezi z realnimi števili. Običajno gre za primere, ko nekaj izračunamo na dva načina, nato pa primerjamo realne in imaginarne dele levih in desnih strani enakosti. Oglejmo si primer.

Očitno ima kompleksno število $1+i$ absolutno vrednost $\sqrt{2}$ in argument $\pi/4$, zato veljata enakosti:

$$1 + i = \sqrt{2}\,\exp(\pi i/4)\,, (1+i)^n = \sqrt{2^n}\,\exp(n\pi i/4)\,,$$

kjer je n poljubno naravno število. Toda po binomski formuli imamo tudi:

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}i^{2k} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}i^{2k+1}.$$

Ko k teče, zavzema izmenoma sode in lihe vrednosti, zato smo prvo vsoto nadomestili z dvema. Namenoma nismo zapisali zgornjih meja pri seštevanju. Binomski koeficienti sami po sebi ugasnejo, čim je spodnji indeks večji od zgornjega. V prvi vsoti je zadnji k tisto največje celo število, za katero je $2k \leq n$, v drugi pa tisto največje celo število, za katero je $2k+1 \leq n$. Tukaj si matematika lahko spet privošči malo svobode. Za vsako realno število x izbere tisto največje celo število m, ki ne presega x. Označi ga s $[x]$ in mu da ime *celi del* števila x. Velja torej: $[x] \leq x < [x] + 1$ in $[x]$ je celo število.

Prva vsota v razvoju $(1 + i)^n$ se torej konča pri $k = [n/2]$, druga pa pri $k = [(n-1)/2]$. Ker pa je $i^{2k} = (-1)^k$ in $i^{2k+1} = i(-1)^k$, lahko zapišemo:

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\,\exp(n\pi i/4) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-1)^k + i \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} (-1)^k.$$

Ker pa je $\exp(n\pi i/4) = \cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4)$, imamo nazadnje:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (-1)^k = \sqrt{2^n} \cos(n\pi/4)\,, \quad \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2k+1} (-1)^k = \sqrt{2^n} \sin(n\pi/4).$$

Zanimivo je opazovati tudi kompleksno geometrijsko zaporedje s kvocientom $q \neq 0$:

$$1, q, q^2, q^3, \ldots$$

Pri tem naj bo $q = |q| \exp(i\varphi)$. Zaporedje je potem oblike

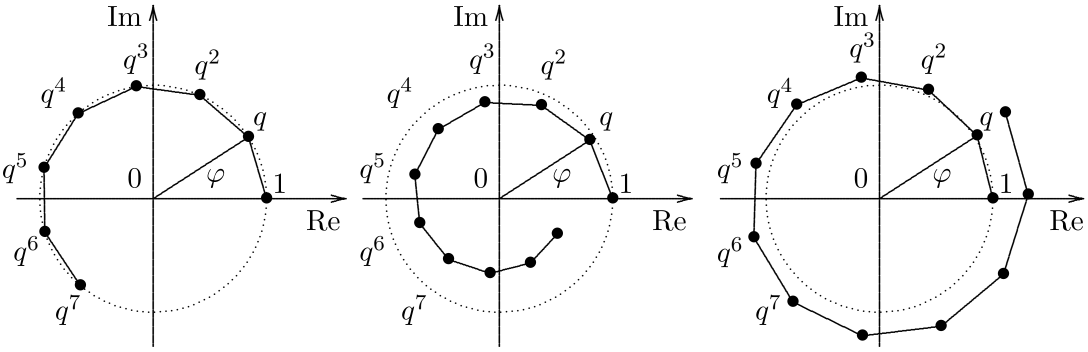
$$1, |q| \exp(i\varphi), |q|^2 \exp(2i\varphi), |q|^3 \exp(3i\varphi), \ldots$$

Če je $|q| = 1$, je zaporedje ciklično, vrti se po enotski krožnici $|z| = 1$ v kompleksni ravnini. Če je razmerje φ/π racionalno število, se zaporedje nekje prične ponavljati, sicer pa ne. Če je $|q| < 1$, dobimo konvergentno spiralo, v primeru $|q| > 1$ pa divergentno spiralo (slika 12). Kako lepo bi bilo, če bi se cene s časom vrtele po prvi ali drugi, ne pa po tretji! Za $|q| < 1$ torej velja:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

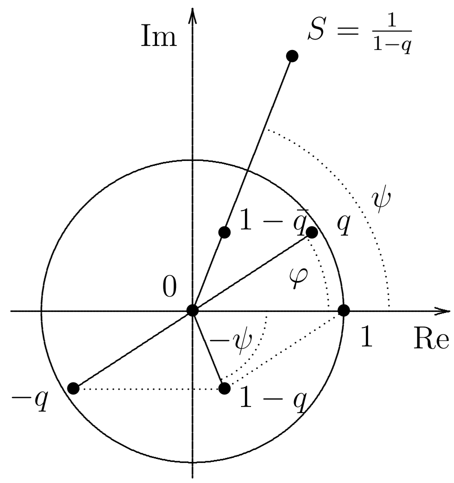
Kako je pa z geometrijsko vrsto $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$ v kompleksnem? Nič teže kot za realen primer ni ugotoviti, da konvergira, če je le $|q| < 1$ in da je tedaj njena vsota $1/(1 - q)$.

Oglejmo si še pot do geometrijske konstrukcije vsote kompleksne geometrijske vrste. Kompleksno število $q = |q| \exp(i\varphi)$ leži znotraj enotske krožnice v kompleksni ravnini. Po paralelogramskem pravilu zlahka konstruiramo število $1-q$ in njegovo konjugirano vrednost $\overline{1-q} = 1-\bar{q}$, ki naj ima argument



Slika 12: Kompleksna geometrijska zaporedja.

ψ, tako da ima samo število $1-q$ argument $-\psi$. Vsota S geometrijske vrste ima tudi argument ψ. Torej lahko z zrcaljenjem točke $1-\bar{q}$ na enotski krožnici konstruiramo vsoto S (slika 13).



Slika 13: Vsota kompleksne geometrijske vrste.

Vsoto lahko prepišemo v obliko, iz katere se da razbrati realni in imaginarni del:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1-\bar{q}}{(1-q)(1-\bar{q})} = \frac{1-|q|\cos\varphi + i|q|\sin\varphi}{1-2|q|\cos\varphi + |q|^2}.$$

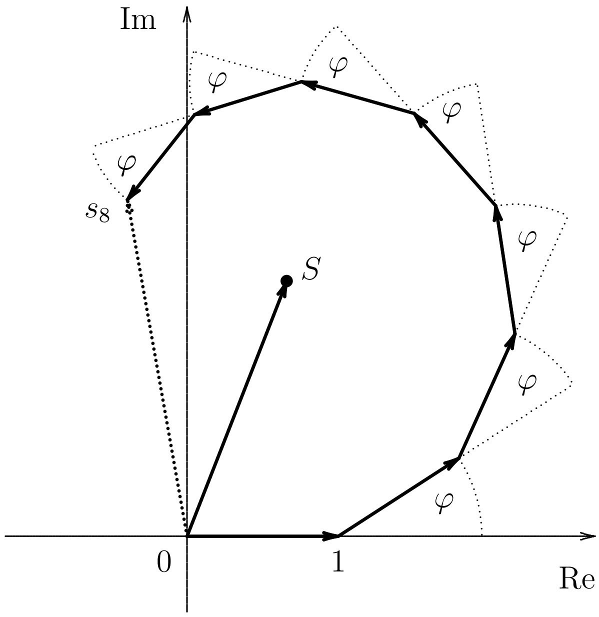
Po drugi strani pa je

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \cos(k\varphi) + i \sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \sin(k\varphi).$$

Torej imamo nazadnje vsoti vrst:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \cos(k\varphi) = \frac{1 - |q| \cos\varphi}{1 - 2|q| \cos\varphi + |q|^2}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \sin(k\varphi) = \frac{|q| \sin\varphi}{1 - 2|q| \cos\varphi + |q|^2}.$$



Slika 14: Vsota še ene kompleksne vrste.

Nadomestimo sedaj argument φ z $\varphi + \pi$. S tem dejansko nadomestimo kvocient q z $-q$. Če upoštevamo relaciji

$$\cos(k\varphi + k\pi) = (-1)^k \cos(k\varphi)\,,\ \sin(k\varphi + k\pi) = (-1)^k \sin(k\varphi)\,,$$

ki veljata za vsako celo število k, dobimo:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |q|^k \cos(k\varphi) = \frac{1 + |q| \cos\varphi}{1 + 2|q| \cos\varphi + |q|^2}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |q|^k \sin(k\varphi) = \frac{-|q| \sin\varphi}{1 + 2|q| \cos\varphi + |q|^2}.$$

To se pravi, da za vsako realno število φ in vsako realno število a, za katero je $|a| < 1$, velja:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\varphi) = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin(k\varphi) = \frac{a\sin\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}.$$

Zakaj smo bili previdni in zapisali 1 posebej pred vrsto? Zato, na ne bi bilo dileme, kaj je začetni člen v primeru $q = 0$. Tedaj bi imeli težavo z nedefiniranim izrazom 0^0. Grafična razlaga je razvidna s slike 14. Včasih je koristna vsota

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\varphi) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}\,,$$

ki jo hitro dobimo iz prejšnje.

Za konec

S tem prispevkom je avtor želel nakazati, da se matematiko lahko poveže tudi z drugimi področji, kot je na primer glasba.

Avtor se bralcem iskreno opprošča za vse napake, ki jih je v svojem neznanju prizadel zapisanim nelatiničnim besedam in notam v pričujočem besedilu. Da te sploh lahko pišemo, se moramo zahvaliti LaTeX-u. Da LaTeX to obvlada, pa je avtor spoznal relativno pozno.

Prav tako GeoGebro, ki že kar imenitno obvlada tudi prostorske krivulje in ploskve, pa tudi LilyPond, ki je kos notam. Vse to je v skladu s Solonovo genialno mislijo. Slavni Solon (Σόλων, 638–558 p.n.e.), atenski zakonodajalec in eden sedmerih modrih (οἱ ἑπτὰ σοφοί), je na svoja stara leta namreč poudarjal:

Γηράσκω δ' αἰεὶ πολλὰ διδασκόμενος.

Staram se, vendar še star zmeraj naprej se učim.

Slika 15: Siva čaplja je pravkar vzletela

Literatura in spletni viri

[1] M. Adlešič, *Svet zvoka in glasbe*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1964.

[2] B. Aubelj, *Antična imena po slovensko*, Modrijan, Ljubljana 1997.

[3] E. Colerus, *Od poštevanke do integrala*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1951.

[4] A. Dokler, *Grško-slovenski slovar*, Knezoškofijski zavod sv. Stanislava, Ljubljana 1915.

[5] K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1958.

[6] S. Prek, *Teorija glasbe*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1961.

[7] S. Samec, *Operne zgodbe*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1996.

[8] M. Snoj, *Slovenski etimološki slovar*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1997.

[9] A. Syropoulos, *Writing Greek with the greek option of the babel*, 1997, spletni vir.