Kovinska razmerja

Marko Razpet

Strokovno srečanje DMFA Slovenije

Maribor, 14. oktobra 2016

Gaußova preslikava

je preslikava $f : [0,1) \to [0,1)$, definirana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{x}\right\} & \text{za } 0 < x < 1, \\ 0 \text{ za} & x = 0 \end{cases}$$

Pri tem pomeni

$$\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$$

$\lfloor u \rfloor$ je celi del števila u, $\{\mathrm{u}\}$ pa njegov ulomljeni del. Velja

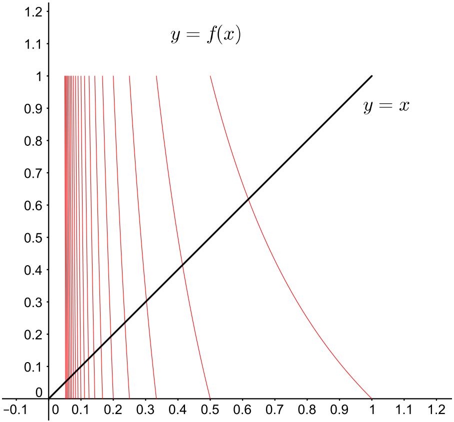
$$u = \lfloor u \rfloor + \{u\}$$

Primera:

$$\lfloor 3.75 \rfloor = 3, \ \{3.75\} = 0.75$$

$$\lfloor -3.75 \rfloor = -4, \ \{-3.75\} = 0.25$$

Graf Gaußove preslikave



Gaußova preslikava ima neskončno mnogo negibnih točk.

Netrivialne negibne točke Gaußove preslikave

$$f(\xi) = \xi, \quad 0 < \xi < 1$$

$$\left\{ \frac{1}{\xi} \right\} = \xi$$

Število ξ razvijemo v (enostavni, navadni, pravilni) verižni ulomek:

$$\xi = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Pri tem so

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

naravna števila.

Obratna vrednost

$$\frac{1}{\xi} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Krajša zapisa:

$$\xi = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots], \quad \frac{1}{\xi} = [a_1; a_2, a_3, a_4, \ldots]$$

Očitno velja

$$\left\{\frac{1}{\xi}\right\} = [0; a_2, a_3, a_4, \ldots]$$

in pogoj za negibno točko Gaußove preslikave je

$$[0; a_2, a_3, a_4, \ldots] = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

Negibne točke so iracionalna števila

Če bi bile negibne točke racionalna števila, bi bili verižni ulomki v najkrajšem zapisu končni. Prejšnji pogoj bi vodil do dveh enakih zapisov različnih dolžin, kar ne gre.
Verižni ulomki, s katerimi se izražajo negibne točke Gaußove preslikave, so neskončni in ustrezajo iracionalnim številom.
Katerim? Iz pogoja

$$[0; a_2, a_3, a_4, \ldots] = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

dobimo zaradi enoličnosti zapisa

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = n$$

Število n je naravno.

Izrazi za negibne točke Gaußove preslikave

$$\xi(n) = [0; n, n, n, \ldots] = [0; \overline{n}] = \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Njihove obratne vrednosti

$$\sigma(n) = \frac{1}{\xi(n)} = [n; n, n, n, \ldots] = [n; \overline{n}] = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

imenujemo *kovinska razmerja*. Število $\sigma(n)$ je n-to kovinsko razmerje.

Kovinska razmerja so kvadratne iracionale

$$\sigma(n) = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{\ddots}}}} = n + \frac{1}{\sigma(n)}$$

$$\sigma^2(n) - n\sigma(n) - 1 = 0$$

Kovinsko razmerje $\sigma(n)$ je pozitivni koren kvadratne enačbe

$$\lambda^2 - n\lambda - 1 = 0$$

Njena korena sta

$$\lambda_1(n) = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}, \ \lambda_2(n) = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}$$

$$\lambda_1(n) + \lambda_2(n) = n,\ \lambda_1(n)\lambda_2(n) = -1$$

Očitno velja

$$\sigma(n) = \lambda_1(n),\ \xi(n) = -\lambda_2(n)$$

Izrazi z verižnimi ulomki:

$$\sigma(n) = \lambda_1(n) = [n; \overline{n}],\ \xi(n) = [0; \overline{n}]$$

$$\lambda_2(n) = [-1; 1, n-1, \overline{n}]\ (n > 1),\ \lambda_2(1) = [-1; 2, \overline{1}]$$

Ker velja

$$n < \sigma(n) < n + 1$$

imenujemo kovinsko razmerje $\sigma(n)$ tudi *kovinska sredina*.

Diskriminanta

Diskriminanta kvadratne enačbe

$$\lambda^2 - n\lambda - 1 = 0$$

je število

$$D(n) = n^2 + 4$$

ki za noben naraven n ni kvadrat. Zakaj?

$$n^2 < n^2 + 4 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

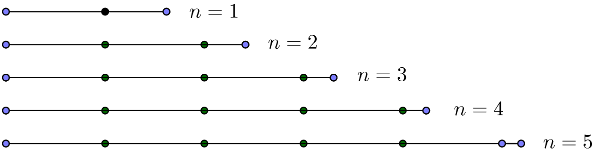
$$n < \sqrt{n^2 + 4} < n + 2$$

Če bi bil $n^2 + 4$ kvadrat naravnega števila, bi to šlo samo v primeru $n^2 + 4 = (n+1)^2$, kar vodi do protislovja $2n = 3$.

Nekaj kovinskih razmerij

n	$D(n)$	$\sigma(n)$	približek	tudi	ime
1	5	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618033989	ϕ, τ	zlato razmerje
2	8	$1+\sqrt{2}$	2,414213562	ψ	srebrno razmerje
3	13	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	3,302775638	χ	bronasto razmerje
4	20	$2+\sqrt{5}$	4,236067977		
5	29	$\frac{5+\sqrt{29}}{2}$	5,192582404		
6	40	$3+\sqrt{10}$	6,162277660		

Posplošitev pojma zlatega razmerja



Sorazmerje, s katerim definiramo zlato razmerje, to je

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (a > b)$$

posplošimo z uvedbo naravnega koeficienta n:

$$\frac{na+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (a > b)$$

Geometrijski pristop

Sorazmerje

$$\frac{na+b}{a} = \frac{a}{b} \ \ (a > b)$$

prepišimo v obliko

$$\frac{a}{b} = n + \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

Po vpeljavi razmerja $\tau(n) = a/b$ dobimo relacijo

$$\tau(n) = n + \frac{1}{\tau(n)}$$

Predelamo jo v enakovredno obliko

$$\tau^2(n) = n\tau(n) + 1, \ \ \tau^2(n) - n\tau(n) - 1 = 0$$

Posledica

Kovinsko razmerje reda n:

$$\tau(n) = \sigma(n) = \frac{1}{\xi(n)} = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2} = [n; \overline{n}]$$

1. Zlato razmerje — zlata medalja za prvega (1.) v športu:

$$\sigma(1) = \phi = \tau = (1 + \sqrt{5})/2 = [1; \overline{1}]$$

2. Srebrno razmerje — srebrna medalja za drugega (2.) v športu:

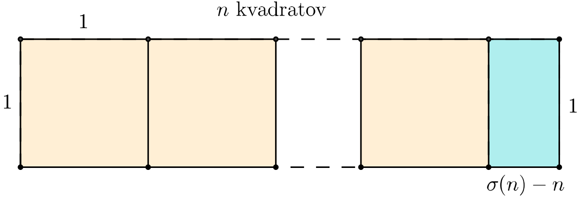
$$\sigma(2) = 1 + \sqrt{2} = [2; \overline{2}]$$

3. Bronasto razmerje — bronasta medalja za tretjega (3.) v športu:

$$\sigma(3) = \chi = (3 + \sqrt{13})/2 = [3; \overline{3}]$$

Kovinski pravokotniki

Kovinski pravokotnik reda n ima stranici v razmerju $\sigma(n)$.



Iz osnovne relacije

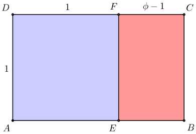
$$\sigma^2(n) - n\sigma(n) = \sigma(n)(\sigma(n) - n) = 1$$

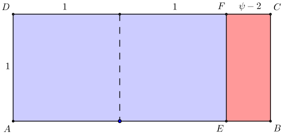
sledi

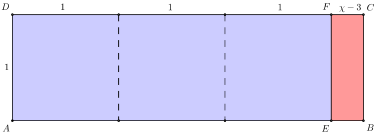
$$\frac{\sigma(n)}{1} = \frac{1}{\sigma(n) - n}$$

Celota je podobna njenemu delu.

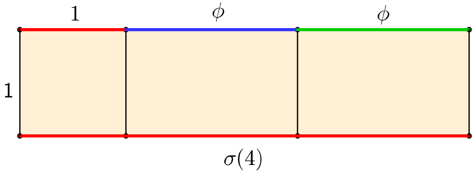
Zlati, srebrni in bronasti pravokotnik



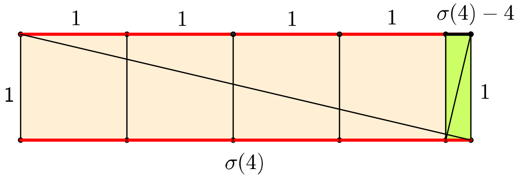




Lastnosti kovinskih pravokotnikov

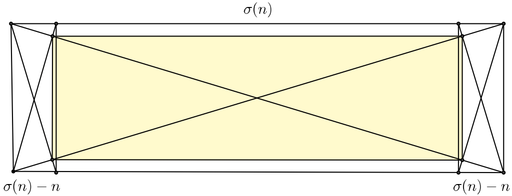


$$\sigma(4) = 1 + 2\phi$$

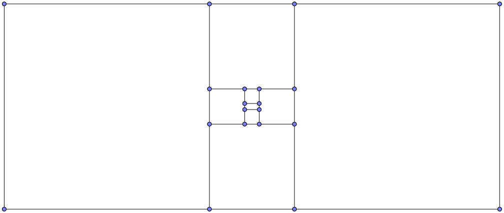


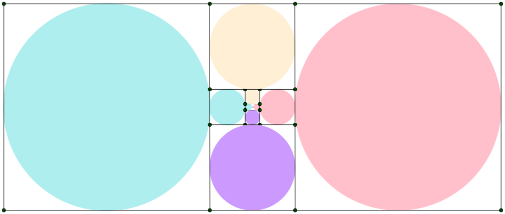
Diagonali se sekata pravokotno

Do novega kovinskega pravokotnika



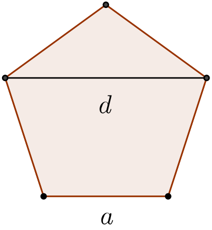
Samopodobnost



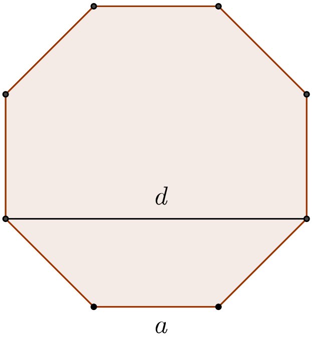


Pravilni petkotnik in pravilni osemkotnik

$$d/a = \sigma(1) = \phi$$



$$d/a = \sigma(2) = \psi$$



Fibonaccijevi polinomi $F_m(x)$

Rekurzija:

$$F_{m+2}(x) = xF_{m+1}(x) + F_m(x)$$

$$F_0(x) = 0, F_1(x) = 1$$

Nekaj začetnih:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0, \\ F_1(x) &= 1, \\ F_2(x) &= x, \\ F_3(x) &= x^2 + 1, \\ F_4(x) &= x^3 + 2x, \\ F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

Lucasovi polinomi $L_m(x)$

Rekurzija:

$$L_{m+2}(x) = xL_{m+1}(x) + L_m(x)$$

$$L_0(x) = 2, L_1(x) = x$$

Nekaj začetnih:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 2, \\ L_1(x) &= x, \\ L_2(x) &= x^2 + 2, \\ L_3(x) &= x^3 + 3x, \\ L_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2, \\ L_5(x) &= x^5 + 5x^3 + 5x. \end{aligned}$$

Fibonaccijevi in Lucasovi polinomi – 2

Fibonaccijevi polinomi $F_m(x)$

Rodovna funkcija:

$$\mathcal{F}(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x) t^m =$$

$$= \frac{t}{1 - xt - t^2}$$

Diferencialna enačba:

$$(x^2+4)y'' + 3xy' - (m^2-1)y = 0$$

$$y(0) = (1 - (-1)^m)/2$$

$$y'(0) = m(1 + (-1)^m)/2$$

Lucasovi polinomi $L_m(x)$

Rodovna funkcija:

$$\mathcal{L}(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x) t^m =$$

$$= \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2}$$

Diferencialna enačba:

$$(x^2+4)y'' + xy' - m^2 y = 0$$

$$y(0) = 1 + (-1)^m$$

$$y'(0) = m(1 - (-1)^m)/2$$

Fibonaccijeva in Lucasova števila

Fibonaccijeva števila F_m

$$F_m = F_m(1)$$

Rekurzija:

$$F_{m+2} = F_{m+1} + F_m$$

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Rodovna funkcija:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m t^m = \frac{t}{1 - t - t^2}$$

Lucasova števila L_m

$$L_m = L_m(1)$$

Rekurzija:

$$L_{m+2} = L_{m+1} + L_m$$

$$L_0 = 2, L_1 = 1$$

$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$

Rodovna funkcija:

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m t^m = \frac{2 - t}{1 - t - t^2}$$

$$u_{m+2} - xu_{m+1} - u_m = 0,\ u_m = \lambda^m,\ \lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1(x) = \frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2},\ \lambda_2(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$\lambda_1(x) > 0,\ \lambda_2(x) < 0,\ \lambda_1(x) + \lambda_2(x) = x,\ \lambda_1(x)\lambda_2(x) = -1$$

Fibonaccijevi polinomi $F_m(x)$

$$F_m(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}(\lambda_1^m(x) - \lambda_2^m(x))$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{j\geq 0} \binom{m}{2j+1} (x^2+4)^j x^{m-2j-1}$$

Lucasovi polinomi $L_m(x)$

$$L_m(x) = \lambda_1^m(x) + \lambda_2^m(x)$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{j\geq 0} \binom{m}{2j} (x^2+4)^j x^{m-2j}$$

$$mF_m(x) = L'_m(x)$$

Fibonaccijevi polinomi $F_m(x)$

$$F_m(x) = \\ = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m-k-1}{k} x^{m-2k-1}$$

$$F_m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m-k-1}{k}$$

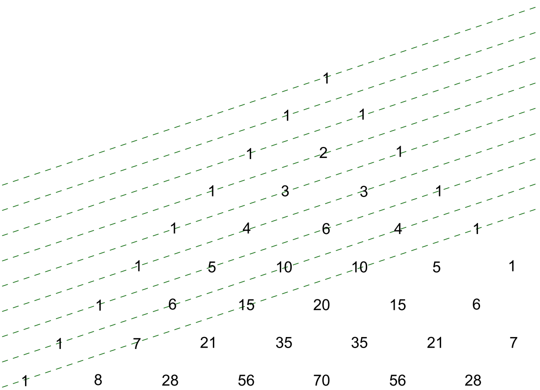
$$(m > 0)$$

Lucasovi polinomi $L_m(x)$

$$L_m(x) = \\ = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{m}{m-2k} \binom{m-k-1}{k} x^{m-2k} + \\ +1 + (-1)^m$$

$$L_m = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{m}{m-2k} \binom{m-k-1}{k} + \\ +1 + (-1)^m \quad (m > 0)$$

Pascalov trikotnik in Fibonaccijeva števila



$1 = F_1$

$1 = F_2$

$1 + 1 = 2 = F_3$

$1 + 2 = 3 = F_4$

$1 + 3 + 1 = 5 = F_5$

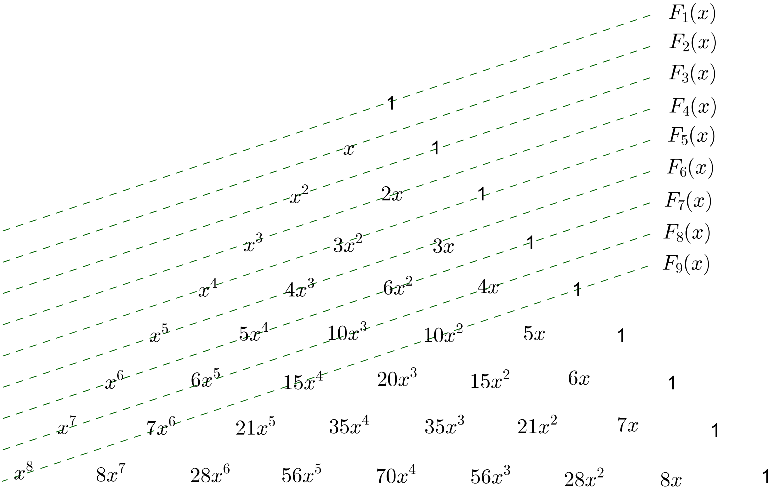
$1 + 4 + 3 = 8 = F_6$

$1 + 5 + 6 + 1 = 13 = F_7$

$1 + 6 + 10 + 4 = 21 = F_8$

$1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 = F_9$

Pascalov trikotnik in Fibonaccijevi polinomi



Enakosti

$$F_{m-1}(x)F_{m+1}(x) - F_m^2(x) = (-1)^m \quad \text{(Cassinijeva)}$$

$$F_m(x)F_{r+1}(x) - F_{m+1}(x)F_r(x) = (-1)^m F_{m-r}(x) \quad \text{(d'Ocagnejeva)}$$

$$F_{m-r}(x)F_{m+r}(x) - F_m^2(x) = (-1)^{m+1-r} F_r(x) \quad \text{(Catalanova)}$$

$$F_{2m+1}(x) = F_m^2(x) + F_{m+1}^2(x)$$

$$L_m(x) = F_{m-1}(x) + F_{m+1}(x)$$

$$\lambda_{1,2}^m(x) = F_m(x)\lambda_{1,2}(x) + F_{m-1}(x)$$

$$(x^2+4)F_m^2(x) = L_m^2(x) + 4(-1)^{m+1}$$

$$F_{2m}(x) = F_m(x)L_m(x)$$

$$(L_n \circ L_m)(x) = L_n(L_m(x)) = L_{mn}(x) \quad (\text{za lihe } m)$$

Limite

Število $F_m(n)$ je m-to Fibonaccijevo število reda n.
Število $L_m(n)$ je m-to Lucasovo število reda n.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{F_{m+1}(n)}{F_m(n)} = \lim_{m\to\infty} \frac{L_{m+1}(n)}{L_m(n)} = \sigma(n)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma^r(n)} = \frac{\sigma(n)}{\sigma(n)-1}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma^r(n)} = \frac{1}{\sigma(n)-1}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{n}{\sigma(n)}\right)^r = \sigma^2(n)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\sigma(n)}\right)^r = n\sigma(n)$$

Potence kovinskih razmerij

Iz enakosti

$$\lambda_1^m(x) = F_m(x)\lambda_1(x) + F_{m-1}(x)$$

dobimo za $x = n$

$$\sigma^m(n) = F_m(n)\sigma(n) + F_{m-1}(n)$$

V posebnem primeru $n = 1$ je $\sigma(1) = \phi$ (zlato razmerje), $F_m(1) = F_m$ (m-to Fibonaccijevo število) in

$$\phi^m = F_m\phi + F_{m-1}$$

V posebnem primeru je

$$\phi^3 = 2\phi + 1 = 2\sigma(1) + 1 = \sigma(4)$$

Problem

Kdaj obstaja med kovinskima razmerjema $\sigma(n)$ in $\sigma(N)$ zveza

$$\sigma(N) = \alpha\sigma(n) + \beta$$

pri racionalnih α in β?
Ne vedno. Take zveze ni na primer med $\sigma(2)$ in $\sigma(3)$, je pa med $\sigma(1)$ in $\sigma(4)$:

$$\sigma(4) = 2\sigma(1) + 1$$

Z vpeljavo ekvivalenčne relacije $\sim$ v množico $\mathbb{N}$ s

$$p \sim q \iff \exists\, \alpha,\ \beta \in \mathbb{Q} :\ \sigma(p) = \alpha\sigma(q) + \beta$$

razdelimo $\mathbb{N}$ na ekvivalenčne razrede $[p]_\sim$. Če sta n in N v istem razredu, obstaja med kovinskima razmerjema $\sigma(n)$ in $\sigma(N)$ zveza

$$\sigma(N) = \alpha\sigma(n) + \beta$$

pri racionalnih α in β.

Nekaj števil $F_m(n)$ in $L_m(n)$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_m(1)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$L_m(1)$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
$F_m(2)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
$L_m(2)$	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238
$F_m(3)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837	141481
$L_m(3)$	2	3	11	36	119	393	1298	4287	14159	46764	154451	510117
$F_m(4)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020	1762289
$L_m(4)$	2	4	18	76	322	1364	5778	24476	103682	439204	1860498	7881196

Iz tabele razberemo razrede:

$$\begin{aligned}
[1]_\sim &= \{1, 4, 11, 29, 76, 199, \ldots\},\\
[2]_\sim &= \{2, 14, 82, 478, 2786, 16238, \ldots\},\\
[3]_\sim &= \{3, 36, 393, 4287, 46764, 510117, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Splošno:

$$[n]_\sim \supseteq \{L_{2m-1}(n) : m \in \mathbb{N}\}$$

Osnovna formula

$$\sigma(L_{2m-1}(n)) = \sigma^{2m-1}(n) = F_{2m-1}(n)\sigma(n) + F_{2m-2}(n) \quad (m \in \mathbb{N})$$

je posledica enakosti

$$\begin{aligned}(x^2+4)F_{2m-1}^2(x) &= L_{2m-1}^2(x) + 4\\ 2\lambda_2^{2m-1}(x) &= \sqrt{x^2+4}F_{2m-1}(x) + L_{2m-1}(x)\end{aligned}$$

Izpeljava osnovne formule:

$$2\sigma(L_{2m-1}(n)) = L_{2m-1}(n) + \sqrt{L_{2m-1}^2(n)+4} =$$

$$= L_{2m-1}(n) + \sqrt{n^2+4}F_{2m-1}(n) = 2\lambda_2^{2m-1}(n) = 2\sigma^{2m-1}(n)$$

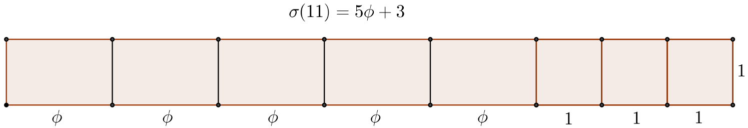
$$\sigma(L_{2m-1}(n)) = \sigma^{2m-1}(n)$$

Povezava med kovinskima številoma iz istega razreda

$$F_{2q-1}(n)\sigma(L_{2p-1}(n)) - F_{2p-1}(n)\sigma(L_{2q-1}(n)) = F_{2p-2q}(n)$$

Primera:

$$\begin{aligned}\sigma(11) &= \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sigma(4) = 5\phi + 3\\ \sigma(76) &= \frac{3}{5} + \frac{34}{5}\sigma(11) = 34\phi + 21\end{aligned}$$



Potence kovinskih števil in verižni ulomki

$$
\begin{aligned}
[n;\overline{n}]^{2m+1} &= [L_{2n+1}(n);\overline{L_{2n+1}(n)}] \\
[n;\overline{n}]^{2m} &= [L_{2m}(n)-1;\overline{1,L_{2m}(n)-2}] \quad (n>1) \\
[1;\overline{1}]^{2} &= [2;\overline{1}]
\end{aligned}
$$

Negibne točke Gaußove preslikave f so obratne vrednosti kovinskih števil $\sigma(n)$. To so vse negibne točke Gaußove preslikave. Posledično so negibne točke Gaußove preslikave tudi lihe obratne potence, ker velja

$$\sigma^{2m-1}(n) = \sigma(L_{2m-1}(n))$$

Za sode eksponente pa to očitno ne velja. Spoznali smo, da velja za $n > 1$ relacija

$$\sigma^{2m}(n) = [L_{2m}(n) - 1; \overline{1, L_{2m}(n) - 2}]$$

Torej je

$$L = f\left(\frac{1}{\sigma^{2m}(n)}\right) = [0; \overline{1, L_{2m}(n) - 2}] \neq \frac{1}{\sigma^{2m}(n)}$$

Potence kovinskih števil in Gaußova preslikava – 2

Nadaljujmo ($f^{\langle 2\rangle}$, $f^{\langle 3\rangle}$ pomenita $f \circ f$ in $f \circ f \circ f$):

$$f^{\langle 2\rangle}\left(\frac{1}{\sigma^{2m}(n)}\right) = [0; \overline{L_{2m}(n) - 2, 1}]$$

$$f^{\langle 3\rangle}\left(\frac{1}{\sigma^{2m}(n)}\right) = [0; \overline{1, L_{2m}(n) - 2}]$$

Tako veljajo relacije

$$f^{\langle 2\rangle}(L) = L,\ f(L) \neq L,\ L = f\left(\frac{1}{\sigma^{2m}(n)}\right)$$

Število L je za f periodična točka reda 2 in s predperiodo dolžine 1.

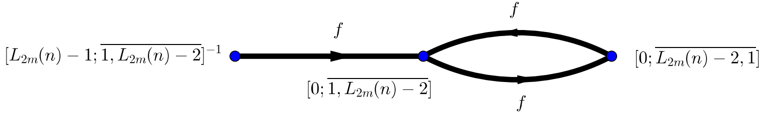
Potence kovinskih števil in Gaußova preslikava – 3

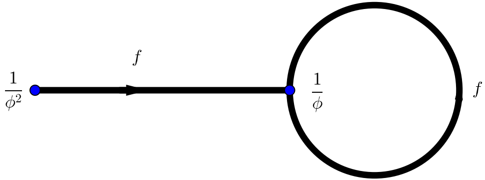
Posebej moramo pogledati primer $m = n = 1$, ko je $\sigma(1) = \phi$ zlato razmerje. Tedaj je

$$f(1/\phi) = 1/\phi,\ f(1/\phi^2) = 1/\phi,\ f^{\langle 2\rangle}(1/\phi^2) = 1/\phi = f(1/\phi^2).$$

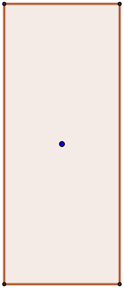
Za $L = f(1/\phi^2)$ je torej $f(L) = L$, kar pomeni, da je L periodična točka reda 1 ali kar negibna točka preslikave f.

Grafična predstavitev

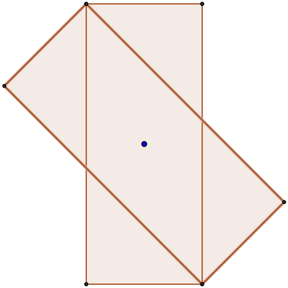




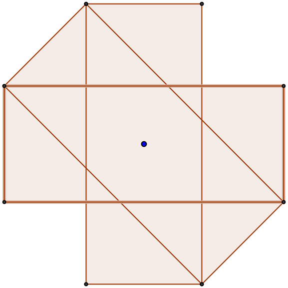
Štirje srebrni pravokotniki – 1



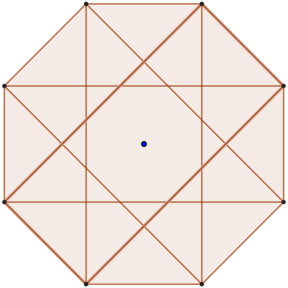
Štirje srebrni pravokotniki – 2



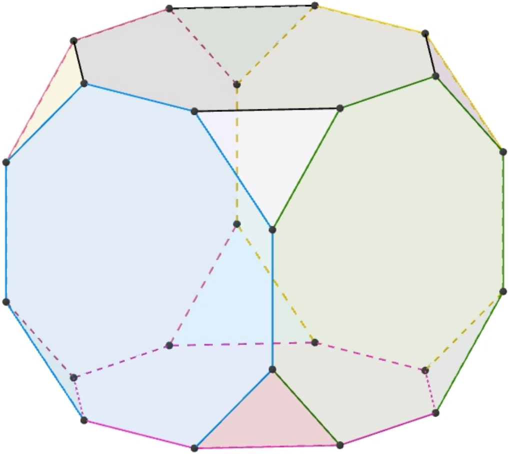
Štirje srebrni pravokotniki – 3



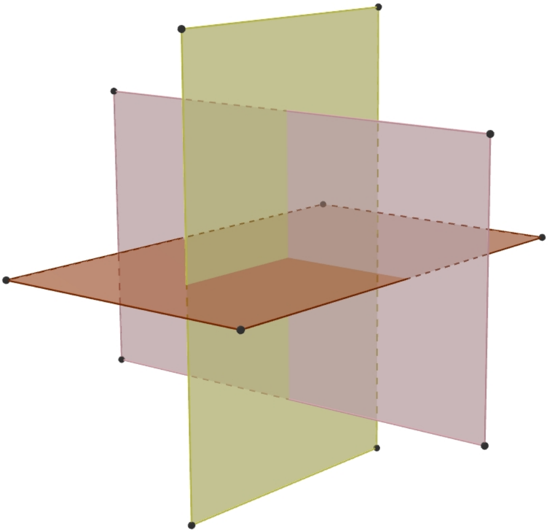
Štirje srebrni pravokotniki – 4



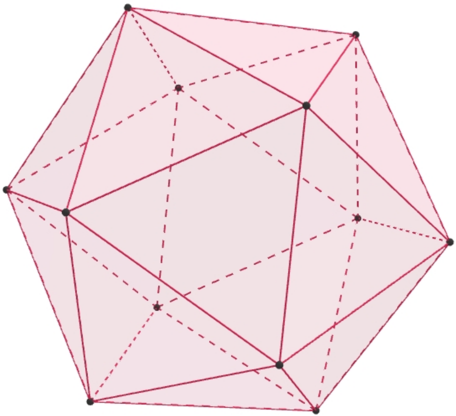
Prisekana kocka



Trije zlati pravokotniki – ogrodje pravilnega ikozaedra



Pravilni ikozaeder



Hvala za vašo pozornost!

Vabljeni na ogled in študij gradiv

http://www.pef.uni-lj.si/matwww