Univerza v Ljubljani

Pedagoška fakulteta

Oddelek za matematiko in računalništvo

Katedra za algebro in analizo

Marko Razpet

FIGAROVA ŠTEVILA

Študijsko gradivo

Matematične teme z didaktiko

Ljubljana, oktober 2015

Vsebina

Seznam slik

Predgovor

S števili se srečujemo že od mladih nog. Še preden smo vstopili v osnovno šolo, smo že znali šteti vsaj do deset. Hitro smo spoznali, da je, na primer, sedem več kot pet. Postopoma smo se števila naučili zapisovati in z njimi tudi računati. Prej ali slej smo ugotovili, da imamo opravka s števili vsepovsod: doma, v otroškem vrtcu, v šoli, na cesti, v trgovini, na banki, v prometu in drugod, tudi v glasbi. Ogledali si bomo šest števil (5, 10, 20, 30, 36, 43), ki jih uporablja Figaro v Mozartovi operi Figarova svatba, in to kmalu po odigrani uverturi, ko se dvigne zavesa. Zapisali bomo njihove bolj ali manj zanimive lastnosti, v glavnem z vidika teorije števil. Navedli pa bomo tudi besede zanje v nekaterih jezikih.

Da pa bo branje nekaj grških besed potekalo brez zapletov, najprej ponovimo standardni grški alfabet. Samo 24 črk (γράμματα) ima. Bo šlo?

Α α	alfa	Ι ι	jota	Ρ ρ	ro
Β β	beta	Κ ϰ	kapa	Σ σ ς	sigma
Γ γ	gama	Λ λ	lambda	Τ τ	tav
Δ δ	delta	Μ μ	mi	ϒ υ	ipsilon
Ε ε	epsilon	Ν ν	ni	Φ φ	fi
Ζ ζ	zeta	Ξ ξ	ksi	Χ χ	hi
Η η	eta	Ο ο	omikron	Ψ ψ	psi
Θ ϑ	theta	Π π	pi	Ω ω	omega

Največ se bomo v tem besedilu ukvarjali z *naravnimi števili*.

Ljubljana, oktobra 2015 — Dr. Marko Razpet

1 Prvo dejanje, prva slika

Wolfgang Amadeus Mozart, avstrijski skladatelj (rojen 27. januarja 1756 v Salzburgu, umrl 5. decembra 1791 na Dunaju) je skomponiral več čudovitih oper, med njimi tudi štiridejanko *Figarova svatba (Le nozze di Figaro)*, ki je krstno predstavo doživela 1. maja 1786 na Dunaju pod skladateljevo taktirko in s cesarjevim dovoljenjem. Libreto zanjo je napisal Lorenzo da Ponte (s prvotnim imenom Emanuele Conegliano), italijanski libretist in pesnik (rojen 10. marca 1749 v Benetkah, umrl 17. avgusta 1838 v New Yorku). Zgodba je zasnovana na komediji *Veseli dan ali Figarova svatba (La folle journée ou le Mariage de Figaro)*, katere avtor je francoski komediograf Pierre Augustin Caron de Beaumarchais, rojen 24. januarja 1732 v Parizu in umrl 18. maja 1799, tudi v Parizu. Naš Anton Tomaž Linhart (rojen 11. decembbra 1756 v Radovljici, umrl 14. julija 1795 v Ljubljani) je sledil Beaumarchaisu in po njegovi predlogi napisal *Ta veseli dan ali Matiček se ženi*.

Slika 1: Wolfgang Amadeus Mozart.

Zgodba se začenja zjutraj na Figarov poročni dan. Figaro je sluga grofa Almavive, Suzana, s katero bi se Figaro rad poročil, pa spletična. Zgodba se konča zvečer istega dne.

Figaro ne sluti, da si je tudi grof poželel lepe Suzane, sklicujoč se na fevdalno pravico prve noči (ius primae noctis), ki jo hoče uveljaviti, čeprav je bila že dolgo razveljavljena. Grof skuša Suzano osvojiti na vsak način. To pripelje zgodbo v razne ljubezenske zmešnjave. Grofove namere pritegnejo druga spletkarja: grofovega prijatelja zdravnika Bartola in njegovo oskrbnico Marcelino, ki imata popolnoma drugačne načrte. Ostarela Marcelina pritiska na Figara, da izpolni še ne zastaran poročni dogovor. Doktor Bartolo bi se Figaru rad maščeval zaradi njegove vloge pri ugrabitvi sedanje grofice, njega dni varovanke Rozine. Nekoliko naiven paž Cherubino dvori vsem ženskam v svoji bližini, tudi grofici, svoji botri, in Suzani. Številne Figarove spletke in bistre ukane žensk po mnogih zapletih pripeljejo do cilja. Na koncu je grof osramočen in prosi svojo soprogo za odpuščanje.

Slika 2: Prizor iz prvega dejanja.

Prvo dejanje, prva slika. Na pol opremljena soba, sredi nje naslonjač. Figaro z merilom v roki, Suzana si pred ogledalom ogleduje pokrivalo, narejeno iz cvetic. Figaro z merilom v roki meri sobo, ki jo je bodočima mladoporočencema dodelil grof. Pri tem izgovarja števila pet, deset, dvajset, trideset, šestintrideset in triinštirideset.

Figaro

Cinque ... dieci ... venti ... trenta ... trentasei ... quarantatré.

Suzana

(se gleda v ogledalu)

Ora sì ch'io son contenta;

sembra fatto inver per me.

Guarda un po', mio caro Figaro,

guarda adesso il mio cappello.

Figaro

Sì mio core, or è più bello,

sembra fatto inver per te.

Suzana in Figaro

Ah, il mattino alle nozze vicino

quanto è dolce al mio/tuo tenero sposo

questo bel cappellino vezzoso

che Susanna ella stessa si fe'.

Slika 3: Del partiture.

Suzana komaj čaka, da bo Figaro pogledal in pohvalil pokrivalo, ki si ga je sama izdelala.

2 Osnovni pojmi v teoriji števil

Števila, ki jih slišimo v začetku Figarove svatbe, bomo imenovali kar *Figarova števila* in jih obravnavali v smislu teorije števil, ki se ukvarja večinoma z naravnimi števili. Raziskuje njihove lastnosti in odnose med njimi. Včasih teorija števil vplete vase tudi cela števila, včasih pa še racionalna.

V nadaljevanju bomo uvedli osnovne pojme v teoriji števil, da bo beseda pri posameznih Figarovih številih tekla hitreje in gladkeje. Če posebej ni povedano, pod pojmom število pogosto razumemo naravno število. Naravna števila so $1, 2, 3, 4, \ldots$

Bellovo število — Bellova števila $\mathcal{B}_n$ so koeficienti v razvoju

$$e^{e^x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} x^n.$$

Nekaj začetnih je:

$$\mathcal{B}_0 = 1, \mathcal{B}_1 = 1, \mathcal{B}_2 = 2, \mathcal{B}_3 = 5, \mathcal{B}_4 = 15, \mathcal{B}_5 = 52, \mathcal{B}_6 = 203.$$

Število $\mathcal{B}_n$ pove, na koliko načinov lahko množico A z n elementi razdelimo na paroma tuje podmnožice, katerih unija je A. To se pravi, da je $\mathcal{B}_n$ število ekvivalenčnih relacij v množici A.

Bernoullijevo število — Bernoullijeva števila B_n so koeficienti v razvoju

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Na splošno so B_n racionalna števila. Če je indeks n liho število, večje od 1, je $B_n = 0$. Nekaj začetnih je:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}.$$

binomski koeficient — Binomski koeficient $\binom{n}{k}$, ki je prirejen številoma n in k, ki sta naravni ali 0, je koeficient v razvoju n-te potence binoma $1 + x$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Za $k > n$ je $\binom{n}{k} = 0$. Za $0 \leqslant k \leqslant n$ lahko izrazimo:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Število $\binom{n}{k}$ kombinatorično pomeni, koliko k-elementnih podmnožic ima n-elementna množica.

brezkvadratno število — Naravno število je *brezkvadratno*, če ni deljivo s kvadratom kakšnega praštevila.

Catalanovo število — Catalanova števila C_n so koeficienti v razvoju

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n.$$

Eksplicitno se n-to Catalanovo število izraža v obliki

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Catalanova števila so naravna, kar je posledica identitete

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

in dejstva, da so binomski koeficienti naravna števila ali 0. Nekaj začetnih Catalanovih števil je:

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, C_7 = 429.$$

delitelj števila — Naravno število k je delitelj naravnega števila n, če je število n deljivo s k. To pomeni, da obstaja naravno število h tako, da je $n = kh$. Pravimo tudi, da k deli n, v oznakah $k|n$. Skupni delitelj števil m in n je tako naravno število d, ki deli m in n. Največji skupni delitelj števil m in n pa je največji od vseh deliteljev teh dveh števil. Navadno ga označimo z $D(m, n)$. Vsak delitelj d števil m in n deli $D(m, n)$.

ekvivalenčna relacija — Binarna relacija R v množici S je ekvivalenčna, če je hkrati refleksivna, simetrična in tranzitivna. Ekvivalenčna relacija množico S razdeli na razrede, ki so si paroma tuje podmnožice množice S, njihova unija pa je S. Elementa istega razreda sta v relaciji R, elementa različnih razredov pa ne.

Eulerjeva funkcija — Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$ je definirana za naravna števila n. Pove, koliko števil množice $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ima z n največji skupni delitelj enak 1. Eulerjeva funkcija je multiplikativna. Za poljubni naravni števili m in n je $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Posebni primeri: $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2$. Če je p praštevilo, je $\varphi(p) = p - 1$. V splošnem je

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

kjer se produkt nanaša na vsa praštevila p, ki so delitelji števila n.

Eulerjevo število — Eulerjeva števila E_n so koeficienti v razvoju

$$\frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n.$$

Vsa Eulerjeva števila z lihim indeksom so enaka 0. Nekaj Eulerjevih števil:

$$E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1\,385, E_{10} = -50\,521.$$

faktoriela, fakulteta — Faktoriela ali fakulteta naravnega števila n je produkt vseh zaporednih naravnih števil od 1 do n. Označujemo jo z $n!$. Tako imamo:

$$1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \ldots$$

Posebej definiramo še $0! = 1$. Velja rekurzivna relacija: $(n+1)! = n!(n+1)$.

Fermatovo število — Vsakemu naravnemu številu n ali 0 pripada Fermatovo število $f_n = 2^{2^n} + 1$. Če je f_n praštevilo, pravimo, da je f_n Fermatovo praštevilo. Fermatova praštevila so

$$f_0 = 3, f_1 = 5, f_2 = 17, f_3 = 257, f_4 = 65537.$$

Ni znano, če obstaja še kakšno drugo Fermatovo praštevilo. Fermatovo število $f_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ je sestavljeno.

Fibonaccijevo število — Fibonaccijevo število F_n je vsak člen Fibonaccijevega zaporedja $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, za katero je $F_0 = 0, F_1 = 1$, za $n \geqslant 2$ pa 3 člene veže rekurzivna relacija $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Fibonaccijevo zaporedje ima začetek:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

figurativno število — Figurativno ali poligonsko število pove, koliko točk je v figuri (diagramu), ki je konstruirana na predpisan način, navadno na osnovi pravilnih večkotnikov ali poligonov. Mednje sodijo trikotniška, kvadratna, petkotniška, šestkotniška, ... števila.

izjemno praštevilo — Praštevilo p je *izjemno*, če v množici $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ ne obstajajo tri zaporedna števila, ki bi bila po modulu p kongruentna kubom. Praštevili 2 in 3 sta izjemni, ker v množicah $\{1\}$ oziroma $\{1, 2\}$ sploh ni treh števil. Praštevilo 5 ni izjemno, ker so števila $1, 2, 3$ iz množice $\{1, 2, 3, 4\}$ zaporedna in veljajo relacije

$$1^3 \equiv 1 \pmod 5,\ 3^3 = 27 \equiv 2 \pmod 5,\ 2^3 = 8 \equiv 3 \pmod 5.$$

Števila $1, 2, 3$ so zaporedna in so kubi števil $1, 3, 2$ po modulu 5. Praštevilo 7 je izjemno. V množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ni treh števil, ki bi bili kubi po modulu 7. Vsi kubi naravnih števil so namreč kongruentni 1 ali 6 po modulu 7. Obstaja samo 13 izjemnih praštevil:

$$2, 3, 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 79, 127, 283.$$

kongruenčno število — Naravno število k je *kongruenčno*, če obstaja racionalno število t tako, da sta števili $t^2 + k$ in $t^2 - k$ kvadrata racionalnih števil. Število 5 je kongruenčno, ker velja $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$, $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$. Kongruenčna so na primer tudi števila

$$6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30.$$

konstruktibilnost pravilnega večkotnika — Pravilni večkotnik z n stranicami je konstruktibilen z neoznačenim ravnilom in šestilom samo v primeru, ko je $n = 2^\nu$, kjer je ν naravno število, večje od 1, ali pa v primeru, ko je

$$n = 2^\nu f_{s_1} f_{s_2} \dots f_{s_r},$$

kjer je ν naravno število ali 0, $f_{s_1}, f_{s_2}, \dots, f_{s_r}$ pa različna Fermatova praštevila.

kvadratno piramidno število — Kvadratno piramidno število $\mathcal{P}_n$ je vsota kvadratov n zaporednih naravnih števil:

$$\mathcal{P}_n = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Kvadratno piramidno je zato, ker $\mathcal{P}_n$ enakih objektov lahko zložimo v kvadratno piramidno skladovnico tako, da jih je na osnovnici Q_n, razporejenih v kvadrat, eno plast više Q_{n-1}, dve plasti više Q_{n-2} itd., vse do vrha, kjer je le eden.

kvadratno število — Kvadratno število Q_n je kvadrat naravnega števila n: $Q_n = n^2$. Zaporedje kvadratnih števil se prične takole: $1, 4, 9, 16, 25, 36 \dots$ Za kvadratna števila velja rekurzivna relacija $Q_{n+1} = Q_n + 2n + 1$. Kvadratna števila so figurativna števila.

magični kvadrat — Magični kvadrat tipa $n \times n$ $(n > 2)$ je kvadratna shema, ki je napolnjena z vsemi števili iz množice $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$, in v kateri je vsota števil po vrsticah, stolpcih in diagonalah enaka $n(n^2+1)/2$. Za $n = 3$ je ta vsota 15, za $n = 4$ pa 34.

palindromno število — Število je v številskem sistemu z osnovo b palindromno, če velja enakost

$$[a_r a_{r-1} \dots a_1 a_0]_b = [a_0 a_1 \dots a_{r-1} a_r]_b.$$

Palindromno število pri osnovi b se bere v obeh smereh enako. Nekateri definirajo palindromno število kot število, ki je palindromno vsaj v enem številskem sistemu.

Pascalov trikotnik — Pascalov trikotnik je številski trikotnik, zaseden z binomskimi koeficienti. Na poševnih stranicah je zaseden z enicami, v n-ti vrstici na k-tem mestu pa $\binom{n}{k}$, njegove elemente pa izračunamo na podlagi Pascalove enakosti

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Vsota elementov v n-ti vrstici je 2^n.

$n = 0$	1										$S_0 = 1$
$n = 1$	1	1									$S_1 = 2$
$n = 2$	1	2	1								$S_2 = 4$
$n = 3$	1	3	3	1							$S_3 = 8$
$n = 4$	1	4	6	4	1						$S_4 = 16$
$n = 5$	1	5	10	10	5	1					$S_5 = 32$
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1				$S_6 = 64$
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1			$S_7 = 128$
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		$S_8 = 256$
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	$S_9 = 512$

Slika 4: Pascalov trikotnik.

petkotniško število — Petkotniško število P_n lahko priredimo vsakemu naravnemu številu n po formuli. $P_n = n(3n - 1)/2$. Tako se izraža n-

to petkotniško število. Sestavljajo zaporedje $1, 5, 7, 12, 15, 22, 26, \ldots$ Za petkotniška števila velja za $n \geqslant 1$ rekurzivna relacija $P_{n+1} = P_n + 3n + 1$.

pitagorejska trojka — Pitagorejska trojka (x, y, z) je sestavljena iz naravnih števil x, y in z, za katera je $x^2 + y^2 = z^2$. Števila x, y in z so stranice pravokotnega trikotnika, ki ima x in y za kateti, z pa za hipotenuzo. Tak trikotnik je pitagorejski. Pitagorejska trojka (x, y, z) je primitivna, če števila x, y in z nimajo skupnega delitelja. Vse primitivne pitagorejske trojke dobimo z obrazci

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,$$

pri čemer sta si naravni števili m in n tuji, sta različnih parnosti (eno liho, eno sodo) in $m > n$.

podolžno število — Naravno število je *podolžno*, če je produkt dveh zaporednih naravnih števil. Vsako podolžno število je oblike $n(n+1)$, kjer je n naravno število. Podolžnih števil je nešteto. Sestavljajo zaporedje $2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$

praštevilo — Praštevilo je naravno število p, ki ima natančno dva različna delitelja: 1 in p. Začetna praštevila so: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Samo praštevilo 2 je sodo, preostala praštevila so liha. Število $p_1 = 2$ je prvo praštevilo, $p_2 = 3$ drugo, $p_3 = 5$ tretje itd. Obstaja neskončno mnogo praštevil. Včasih je pomembno, če liho praštevilo pri deljenju s 4 da ostanek 1 ali 3.

praštevilski dvojček — Praštevilski dvojček je urejeni par $(p, p+2)$, sestavljen iz praštevil p in $p+2$. Najmanjši praštevilski dvojčki so $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$.

praštevilski trojček — Edini praštevilski trojček, ki ga sestavljajo zaporedna liha števila, je $(3, 5, 7)$. Praštevilski trojček prve vrste je urejena trojka $(p, p + 2, p + 6)$, kjer so $p, p + 2, p + 6$ praštevila. Primer: $(5, 7, 11)$. Praštevilski trojček druge vrste je urejena trojka $(p, p+4, p+6)$, kjer so $p, p + 4, p + 6$ praštevila. Primer: $(7, 11, 13)$.

pravilni polieder — Pravilni polieder je geometrijsko telo, ki je omejeno s skladnimi pravilnimi večkotniki tako, da se v vsakem telesnem oglišču stika enako število teh večkotnikov. Obstaja samo pet pravilnih teles, tudi platonskih teles: tetraeder ali četverec, heksaeder ali kocka, oktaeder ali osmerec, dodekaeder ali dvanajsterec in ikozaeder ali dvajseterec. Dodekaeder je omejen z dvanajstimi skladnimi pravilnimi petkotniki. V 19. stoletju so imena pravilnih teles poslovenili v: četverostenje, šesterostenje, osmerostenje, dvanajsterostenje in dvajseterostenje. Besede se niso prijele. Večinoma uporabljamo izraze, ki izvirajo iz grških števnikov: τέτταρες, ἕξ, ὀκτώ, δώδεκα, εἴκοσι (4, 6, 8, 12, 20).

prikladno število — Število n je *prikladno* (po Eulerju), če ima naslednjo lastnost. Če ima liho število $k > 1$ enoličen zapis $k = x^2 + ny^2$, kjer sta x in y nenegativni celi števili ter sta si števili x^2 in ny^2 tuji, potem je p praštevilo. Obstaja samo 65 prikladnih števil. Primer. Za $x = 7$ in $y = 13$ dobimo $k = 7^2 + 30 \cdot 13^2 = 5\,119$, ki je praštevilo, zapis pa en sam.

sestavljeno število — Naravno število n je *sestavljeno*, če je produkt enega ali več praštevil. Sestavljeno število lahko enolično zapišemo v obliki

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

kjer je r naravno število, eksponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ pa naravna števila ali 0. Zgornji zapis imenujemo *faktorizacija števila n* na prafaktorje.

srečno število — Do *srečnih* števil pridemo, če naravna števila presejemo po naslednjem postopku. Na seznamu naravnih števil ohranimo 1, nato pa vsako drugo začenši z 2 brišemo. Ostanejo sama liha števila. Nato pa od teh brišemo vsako tretje število. Potem pa od preostalih brišemo vsako sedmo število. Nato brišemo od preostalih vsako deveto število. Tako delamo v nedogled in na seznamu nam ostanejo srečna števila:

$$1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, 25, 31, 33, 37, 43, 49, \ldots$$

število celoštevilskih točk na krožnici — Na krožnici $x^2 + y^2 = n^2$ v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy, kjer je njen polmer n naravno število, je $N(n)$ točk s celoštevilskimi koordinatami x in y. Pri tem je

$$N(n) = 4(2\beta_1 + 1)(2\beta_2 + 1) \ldots (2\beta_u + 1),$$

kjer so $p_1, p_2, \ldots, p_u$ praštevila, ki pri deljenju s 4 dajo ostanek 1, v razcepu

$$n = 2^{\alpha} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_u^{\beta_u} q_1^{\gamma_1} q_2^{\gamma_2} \ldots q_v^{\gamma_v}$$

števila n na prafaktorje. Prafaktorji $q_1, q_2, \ldots, q_v$, ki pri deljenju s 4 dajo ostanek 3, na število $N(n)$ ne vplivajo.

število π — Število π ali *krožno število*, tudi *krožna konstanta*, je razmerje med obsegom in premerom kroga. Število π je iracionalno, kar pomeni, da ga ne moremo zapisati kot kvocient dveh naravnih števil. Je pa tudi transcendentno število. To se pravi, da π ni ničla nobenega polinoma s celimi koeficienti. Približno je π enak 3.1415, kot ulomek pa 22/7, pa tudi 355/113. S hitrimi elektronskimi računalniki so ga izračunali na bilijone decimalk.

številski sistem — Za številski sistem izberemo naravno število $b > 1$, ki mu rečemo osnova številskega sistema. Vsako naravno število n lahko enolično izrazimo v obliki

$$n = a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \ldots + a_1 b + a_0.$$

pri tem je r naravno število, $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r$ pa naravna števila med vključno 0 in vključno $b - 1$. To so števke števila n pri osnovi b. Za zapis števil z osnovo b potrebujemo b znakov. Na kratko zapišemo:

$$n = [a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0]_b.$$

Sistem je pozicijski, ker je pomembno, kje stoji kakšna števka. Pri osnovi $b = 10$ imamo običajni desetiški ali dekadni številski sistem in n zapišemo brez posebnih oznak:

$$n = a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0.$$

Pri $b = 2$ imamo dvojiški ali binarni številski sistem, pri $b = 3$ trojiški ali ternarni itd. Pomembni so osmiški ali oktalni za $b = 8$, šestnajstiški ali heksadecimalni pri $b = 16$, dvajsetiški ali vigezimalni pri $b = 20$, šestdesetiški ali seksagezimalni pri $b = 60$.

tetraedrsko število — Tetraedrsko število $\mathcal{T}_n$, kjer je n naravno število, je vsota prvih n trikotniških števil:

$$\mathcal{T}_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}.$$

Tetraedrsko je zato, ker $\mathcal{T}_n$ enakih objektov lahko zložimo v tetraedrsko skladovnico, v kateri jih je na osnovnici T_n, razporejenih v enakostranični trikotnik, eno plast više T_{n-1}, dve plasti više T_{n-2} itd., vse do vrha, kjer je le eden.

trikotniško število — Trikotniško število je poseben primer poligonskega ali figurativnega števila. Vsakemu naravnemu številu n priredimo n-to trikotniško število T_n s formulo

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

Vsako trikotniško število je naravno število. Velja preprosta rekurzivna relacija $T_{n+1} = T_n + n + 1$ za $n \geqslant 1$. Ime so trikotniška števila dobila po trikotni skladovnici, v katero lahko zložimo T_n enakih objektov tako, da jih je na osnovnici n, eno vrsto više $n-1$, dve vrsti više $n-2$ itd., vse do vrha, kjer je le eden. Trikotniška števila sestavljajo zaporedje $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \ldots$ Vsota dveh zaporednih trikotniških števil je kvadratno število: $T_n + T_{n+1} = Q_{n+1}$.

tuji si množici — Neprazni množici A in B sta si tuji ali disjunktni, če je njun presek prazen: $A \cap B = \varnothing$. Množici sodih in lihih števil sta si tuji.

tuji si števili — Naravni števili m in n sta si tuji, če je njun največji skupni delitelj enak 1. Tuji si števili nimata skupnih faktorjev, ki bi bili večji kot 1. Tuji sta si na primer števili 3 in 5, 3 in 6 pa ne.

verižni ulomek — Verižni ulomek je izraz oblike

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

Števila $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ so naravna. Verižni ulomek je lahko končen ali neskončen.

zlato razmerje — Točka deli daljico v zlatem ali stalnem razmerju, če je razmerje daljšega odseka proti krajšemu enak dolžini daljice proti daljšemu odseku. Diagonali pravilnega petkotnika se delita v zlatem razmerju. To razmerje označujemo s ϕ ali τ in je številsko enako $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Zlato razmerje zadošča enačbi $\phi^2 = \phi + 1$. Iz ekvivalentne relacije $\phi = 1 + 1/\phi$ dobimo razvoj v verižni ulomek, ki vsebuje same enice: $\phi = [1; 1, 1, 1, \ldots]$.

Zlato razmerje je Evklid imenoval skrajno in srednje razmerje (ἄκρος καὶ μέσος λόγος). V renesansi so ga imenovali božansko razmerje (divina proportione), šele Martin Ohm je v 19. stoletju vpeljal izraz zlato razmerje.

Zofijino praštevilo — Praštevilo p je *Zofijino*, če je tudi $2p + 1$ praštevilo. Število 3 je Zofijino praštevilo, 7 pa ne. Ime so Zofijina praštevila dobila po francoski matematičarki Marie Sophie Germain (1776–1831). Germainova je za Zofijina praštevila $p \geqslant 3$ dokazala, da enačba $x^p + y^p = z^p$ ni rešljiva v naravnih številih.

Slika 5: Marie Sophie Germain kot 14-letnica.

3 Pet

Število pet zapišemo z znakom 5. Različni narodi in kulture pa so uporabljali in še uporabljajo tudi druge številske znake. Rimljani so za pet uporabljali znak V. Število 5 je med številoma 4 in 6. Število 5 je liho število, saj pri deljenju z 2 da ostanek 1: $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Je pa tudi tretje praštevilo, saj ima natančno dva delitelja: sebe in 1. Pred 5 sta praštevili 2 in 3.
Število 5 ni trikotniško. Kot zanimivost: peto trikotniško število $T_5 = 5 \cdot 6/2 = 15$ ima število 5 na mestu enic. Število 5 je drugo petkotniško število, ker je $P_2 = 2(3 \cdot 2 - 1)/2 = 5$. Število 5 ni kvadratno, ker ne obstaja tako naravno število n, ki bi rešilo enačbo $n^2 = 5$.
Eulerjeva funkcija $\varphi(n)$ ima za $n = 5$ vrednost $\varphi(5) = 4$, ker so števila $1, 2, 3, 4$ tuja številu 5.
Število 5 je Fermatovo praštevilo. Znani izrek pove, da je pravilni petkotnik konstruktibilen z neoznačenim ravnilom in šestilom. Pravilni petkotnik ima 5 enako dolgih diagonal.
V desetiškem sistemu zapisano število je deljivo s 5 samo v primeru, ko na

mestu enic stoji 0 ali 5. Vsi mnogokratniki števila 5 imajo na mestu enic število 0 ali 5. Kvadrat, kub, bikvadrat, ... števila, ki ima 5 na mestu enic, ima tudi 5 na mestu enic.

Število 5 je vsota dveh kvadratov: $5 = 2^2 + 1^2$. V binarnem številskem sistemu število 5 zapišemo kot $[101]_2$. Zato je 5 palindromno število v binarnem zapisu. Prav tako je kvadrat števila 5 vsota dveh kvadratov: $5^2 = 3^2 + 4^2$. To pomeni, da je $(3, 4, 5)$ pitagorejski trikotnik. Število 5 je najmanjša hipotenuza pitagorejskih trikotnikov. Število 5 je kateta pitagorejskih trikotnikov $(5, 12, 13)$ in $(12, 5, 13)$. To sta edina pitagorejska trikotnika, ki imata 5 za eno od katet.

Ničel polinoma stopnje 5 ali več se v splošnem po znanem izreku (Abel–Ruffini) ne da izraziti z radikali.

Število 5 je člen Fibonaccijevega zaporedja. Hitro lahko namreč ugotovimo, da je $F_5 = 5$.

Množica s petimi elementi ima $2^5 = 32$ podmnožic in $\mathcal{B}_5 = 52$ ekvivalenčnih relacij. Množica s tremi elementi ima $2^3 = 8$ podmnožic in $\mathcal{B}_3 = 5$ ekvivalenčnih relacij. Pri tem je $\mathcal{B}_n$ Bellovo število, n-to po vrsti.

Število 5 nastopi v zlatem razmerju

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

To je v pravilnem petkotniku razmerje med dolžino d diagonale in dolžino a stranice: $d/a = \phi$ (slika 6). V tem razmerju se sekata tudi dve diagonali pravilnega petkotnika.

Pet stvari lahko postavimo v ravno vrsto na $5! = 120$ različnih načinov.

Na krožnici $x^2 + y^2 = 5^2$ s polmerom 5 v koordinatni ravnini Oxy je 12 točk s celoštevilskimi koordinatami. Število 5 je četrta decimalka v zapisu števila

π: $\pi = 3.14159\ldots$

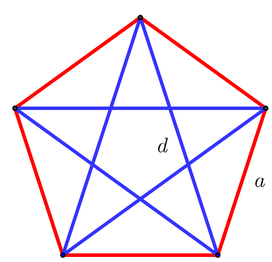
Četrto Eulerjevo število je enako 5: $E_4 = 5$.

Število 5 je tretje Catalanovo število:

$$C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 3!} = 5.$$

Razvoj števila $(5+\sqrt{29})/2$ v verižni ulomek se izraža s samimi petkami $[5; 5, 5, \ldots]$.

Število 5 je Zofijino praštevilo, ker je $2\cdot 5+1 = 11$ tudi praštevilo. Število 5 je v središčnem polju magičnega kvadrata tipa 3×3 (slika 7). Število 5 je srednje število praštevilskega trojčka $(3, 5, 7)$. Število 5 je brezkvadratno, ker ni deljivo s kvadratom nobenega praštevila.



Slika 6: Pravilni petkotnik z diagonalami.

Iz števila 5 je izpeljanih več besed, na primer: peti, peter, peterček, peterec, peteren, peterica, peterka, petero, peteroboj, peterokrak, peterokotnik, petkotnik, peterolisten, petič, petkrat, petica, petina, petka, petek, petkraten, petkratnik, petletka, petleten, petletnica, petmesten, petminuten, petnadstropen, petnajst, petdeset.

Sedaj pa navedimo besede za število 5 v nekaterih jezikih.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Slika 7: Magični kvadrat.

pet — slovensko — 5

quinque — latinsko — V

cinque — italijansko

cinq — francosko

cinco — špansko

cinco — portugalsko

cinc — katalonsko

cinc — furlansko

kvin — esperanto

cincu — sicilijansko

cinche — napolitansko

πέντε — klasično grško — ε′

πέντε — novogrško

пять — rusko

п'ять — ukrajinsko

пяць — belorusko

пет — srbsko

пет — makedonsko

пет — bolgarsko

тав — mongolsko

биш — tatarsko

fünf — nemško

vijf — nizozemsko

fimm — islandsko

fem — norveško

fem — švedsko

fem — dansko

five — angleško

pet — hrvaško

pět — češko

pät' — slovaško

pięć — poljsko

öt — madžarsko

viisi — finsko

viis — estonsko

pesë — albansko

beş — turško

bot — baskovsko

penki — litovsko

pieci — letonsko

cúig — irsko

pemp — bretonsko

panč — romsko

पञ्चन् — sanskrt — ५ — panjčan

पांच — hindijsko — ५ — panč

पाच — marati — ५ — pač

पाँच — nepalsko — ५ — panča

خمسة — arabsko — ٥ — hamsa

پنج — perzijsko — ۵ — pandž

پانچ — urdu — ۵ — panč

پنځه — pašto — ٥ — pinca

חמש — hebrejsko — ה — hameš

4 Deset

Število 10 je sodo število, ker je deljivo z 2: $10 = 2 \cdot 5$. Njegov predhodnik je 9, naslednik pa 11. Število 10 je osnova desetiškega ali dekadnega številskega sistema. Vsako naravno število n lahko enolično zapišemo v obliki

$$n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

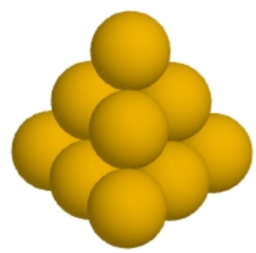
kjer je r naravno število ali 0, $a_r, a_{r-1}, \ldots, a_1, a_0$ pa nenegativna cela števila med vključno 0 in vključno 9. To so števke števila n. Zato lahko zapišemo krajše $n = [a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0]_{10}$ oziroma kar $n = a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0$. Števka a_0 predstavlja enice, a_1 desetice, ... števila n. Binarno lahko zapišemo: $10 = [1010]_2$.

Ker je $10 = 2 \cdot 5 = 2 f_1$, kjer je $f_1 = 5 = 2^{2^1} + 1$ Fermatovo praštevilo, je pravilni desetkotnik konstruktibilen z neoznačenim ravnilom in šestilom.

Število 10 je četrto trikotniško število, ker je $10 = T_4 = 4 \cdot 5/2$ in ga lahko zapišemo v obliki $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Deseto trikotniško število je $T_{10} = 10 \cdot 11/2 = 55$.

Število 10 je vsota dveh kvadratov: $10 = 3^2 + 1^2$. Samo število 10 pa ni kvadratno. Naravno število n je deljivo z 10, če na mestu enic števila n, ki je zapisano v desetiškem sistemu, stoji ničla. V desetiškem številskem sistemu naravno število pomnožimo z 10 tako, da mu na desni strani pripišemo ničlo, na primer: $10 \cdot 365 = 3650$. Kvadrat števila 10 je $10^2 = 100$. Številska vsota števila 10 je 1.

Število 10 je vsota prvih treh praštevil: $10 = 2 + 3 + 5$. Število 10 je tretje tetraedrsko število, ker ga lahko izrazimo kot vsoto prvih treh trikotniških števil: $\mathcal{T}_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 + 6 = 10$. Deset enakih kroglic lahko zložimo v tetraedrsko skladovnico (slika 8). Število 10 je vsota prvih štirih faktoriel: $10 = 0! + 1! + 2! + 3! = 1 + 1 + 2 + 6$.



Slika 8: Ponazoritev tretjega tetraedrskega števila.

V množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ so 4 števila, ki so tuja 10. Zato je $\varphi(10) = 4$, kjer je $\varphi(n)$ Eulerjeva funkcija. Število 10 je najmanjše število, ki ga lahko zapišemo, če se ne oziramo na vrstni red sumandov, na dva načina kot vsoto dveh praštevil: $10 = 5 + 5 = 3 + 7$. Število 10 ima 4 delitelje: $1, 2, 5, 10$.

Vsota vseh deliteljev števila n definira funkcijo $\sigma(n)$:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Primera: $\sigma(5) = 6, \sigma(10) = 18$.

V desetiškem razvoju števila π niz 10 prvič zaseda šele 49. in 50. decimalno mesto:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 58\ldots$$

Med prvimi 100 000 decimalkami števila π se to zgodi 1032-krat.

Na krožnici $x^2 + y^2 = 10^2$ s polmerom 10 v koordinatni ravnini Oxy je 12 točk s celoštevilskimi koordinatami.

Število 10 je brezkvadratno, ker ni deljivo s kvadratom nobenega praštevila.

Sedaj pa navedimo besede za število 10 v nekaterih jezikih.

deset — slovensko — 10

decem — latinsko — X

dieci — italijansko

dix — francosko

diez — špansko

dez — portugalsko

deu — katalonsko

dîs — furlansko

dek — esperanto

deci — sicilijansko

diece — napolitansko

δέκα — klasično grško — ι´

δέκα — novogrško

десять — rusko

десять — ukrajinsko

дзесяць — belorusko

десет — srbsko

десет — makedonsko

десет — bolgarsko

арав — mongolsko

ун — tatarsko

zehn — nemško

tien — nizozemsko

tíu — islandsko

ti — norveško

tio — švedsko

ti — dansko

ten — angleško

deset — hrvaško

deset — češko

desat' — slovaško

dziesięć — poljsko

tíz — madžarsko

kymmenen — finsko

kümme — estonsko

dhjetë — albansko

on — turško

hamar — baskovsko

dešimt — litovsko

desmit — letonsko

deich — irsko

dek — bretonsko

deš — romsko

दशन् — sanskrt — १० — dašan

दस — hindijsko — १० — das

दहा — marati — १० — daha

दस — nepalsko — १० — daša

عشرة — arabsko — ١٠ — ašra

ده — perzijsko — ١٠ — dah

دس — urdu — ١٠ — das

لس — pašto — ١٠ — las

עשר — hebrejsko — י — eser

5 Dvajset

Število 20 je sodo število, ker je deljivo z 2, $20 = 2 \cdot 10$, njegov predhodnik je 19, naslednik pa 21. Razcep na prafaktorje ima obliko $20 = 2^2 \cdot 5$. Lahko ga izrazimo s prvim Fermatovim praštevilom f_1: $20 = 2^2 f_1$. To pomeni, da je pravilni dvajsetkotnik konstruktibilen z neoznačenim ravnilom in šestilom. Število 20 je produkt dveh zaporednih števil: $20 = 4 \cdot 5$. Zato je 20 podolžno število. Število 20 lahko zapišemo kot vsoto štirih zaporednih sodih števil: $20 = 2 + 4 + 6 + 8$.

Število 20 je bilo nekoč osnova številskega sistema, kar izpričuje izraz za 80 v francoščini: *quatre-vingt*, dobesedno štiri–dvajset. Izraz za 90 je potem *quatre-vingt-dix*, dobesedno štiri–dvajset-deset.

V angleščini obstaja beseda *score*, ki označuje 20 kosov, podobno kot naš *ducat* označuje 12 kosov nečesa. Človek ima 20 prstov: 10 na rokah, 10 na nogah. Nekateri jeziki z različnima besedama razločujejo prst na rokah in nogah. Nemci imajo besedo *Finger* za prst na rokah, za prst na nogah pa *Zehe*. Podobno Angleži: *finger* in *toe*. Slovenci uporabljamo besedo *prst* tudi v pomenu *zemlja*. Zato lahko *vtaknemo prst v prst*. Število 20 je bila osnova številskega sistema Majev. Za zapis števil so si morali izmisliti 20 števk, za vse naše številke od 0 do 19, na primer:

0 = ,1 = ·, 5 = |, 10 = ||, 19 = ⁞|||

Mi uporabljamo 10 števk za zapis števil v desetiškem sistemu. V babilonskem šestdesetiškem sistemu so uporabljali kar 60 števk, zapisanih v klinopisu.

Število 20 je vsota dveh kvadratov: $20 = 2^2 + 4^2$. Je pa tudi vsota štirih kvadratov: $20 = 3^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$. Število 20 je četrto tetraedrsko število, ker ga lahko izrazimo kot vsoto prvih štirih trikotniških števil: $\mathcal{T}_4 = T_1 +$

$T_2 + T_3 + T_4 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$. Dvajset enakih kroglic lahko zložimo v tetraedrsko skladovnico.

Število 20 je vsota treh Fibonaccijevih števil: $20 = F_3 + F_5 + F_7 = 2 + 5 + 13$.
Od vključno 1 do vključno 19 je $\varphi(20) = 8$ števil, ki so tuja 20. To so $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$. Število 20 ima 6 deliteljev: $1, 2, 4, 5, 10, 20$. Njihova vsota je $\sigma(20) = 42$.

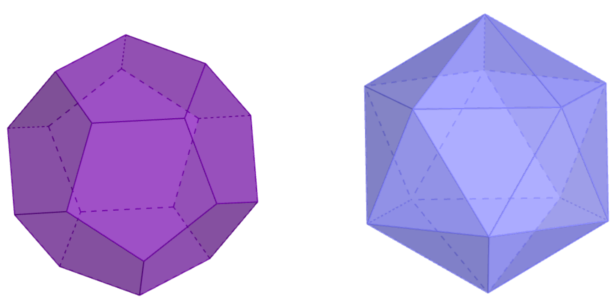
V desetiškem razvoju števila π niz 20 prvič zaseda šele 53. in 54. decimalno mesto:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582\textcolor{red}{20}9\ldots$$

Med prvimi 100 000 decimalkami števila π se to zgodi 961-krat.

Na krožnici $x^2 + y^2 = 20^2$ s polmerom 20 v koordinatni ravnini Oxy je 12 točk s celoštevilskimi koordinatami.

Število 20 je srednji koeficient v šesti vrstici Pascalovega trikotnika: $20 = \binom{6}{3}$.
Pravilni ikozaeder ali dvajseterec omejuje 20 skladnih enakostraničnih trikotnikov. Pravilni dodekaeder ali dvanajsterec ima 20 oglišč.



Slika 9: Dodekaeder in ikozaeder.

Sedaj pa navedimo besede za število 20 v nekaterih jezikih.

dvajset — slovensko — 20

viginti — latinsko — XX

venti — italijansko

vingt — francosko

veinte — špansko

vinte — portugalsko

vint — katalonsko

vincj — furlansko

dudek — esperanto

vinti — sicilijansko

vinte — napolitansko

εἴκοσι — klasično grško — κʹ

είκοσι — novogrško

двадцать — rusko

двадцять — ukrajinsko

дваццаць — belorusko

двадесет — srbsko

дваесет — makedonsko

двадесет, двайсет — bolgarsko

хорь — mongolsko

егерме — tatarsko

zwanzig — nemško

twintig — nizozemsko

tuttugu — islandsko

tjue — norveško

tjugo — švedsko

tyve — dansko

twenty — angleško

dvadeset — hrvaško

dvacet — češko

dvadsat' — slovaško

dwadzieścia — poljsko

húsz — madžarsko

kaksikymmentä — finsko

kakskümmend — estonsko

njëzet — albansko

yirmı— turško

hogei — baskovsko

dvidešimt — litovsko

divdesmit — letonsko

fiche — irsko

ugent — bretonsko

biš — romsko

विंशति — sanskrt — २० — vimšati

बीस — hindijsko — २० — bis

वीस — marati — २० — vis

वीस — nepalsko — २० — visa

عشرون — arabsko — ٢٠ — išrun

بیست — perzijsko — ٢٠ — bist

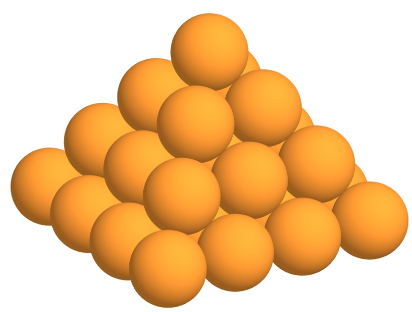
بیس — urdu — ٢٠ — bis

شل — pašto — ٢٠ — šal

עשרים — hebrejsko — כ — ešrim

6 Trideset

Število 30 je sodo število, ker je deljivo z 2, $30 = 2 \cdot 15$, njegov predhodnik je 29, naslednik pa 31. Torej je 30 tesno med dvema zaporednima prašteviloma. Razcep na prafaktorje ima obliko $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Število 30 je najmanjše, ki je produkt treh zaporednih praštevil. Lahko ga izrazimo tudi s Fermatovima prašteviloma f_1 in f_2: $30 = 2f_1f_2$. To pomeni, da je pravilni tridesetkotnik konstruktibilen z neoznačenim ravnilom in šestilom. Število 30 je produkt dveh zaporednih števil: $30 = 5 \cdot 6$. Torej je 30 podolžno število. Število 30 lahko zapišemo kot vsoto petih zaporednih sodih števil: $30 = 2+4+6+8+10$. Število 30 je vsota treh kvadratov, $30 = 1^2+2^2+5^2$, pa tudi vsota zaporednih štirih kvadratov: $30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. Zato trideset enakih kroglic lahko zložimo v skladovnico, ki ima obliko kvadratne piramide. Torej je 30 četrto kvadratno piramidno število.
Število 30 je tudi produkt treh zaporednih Fibonaccijevih števil: $30 = F_3F_4F_5 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. S faktorielami lahko zapišemo: $30 = 3! + 4!$.



Slika 10: Ponazoritev četrtega kvadratnega piramidnega števila.

Pravilni ikozaeder ali dvajseterec in dodekaeder ali dvanajsterec imata vsak po 30 robov. Telesi sta si dualni.

Med prvimi 29 števili je 8 tujih 30, in sicer $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Zato je $\varphi(30) = 8$. Delitelji števila 30 so $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Njihova vsota je $\sigma(30) = 72$.

V desetiškem razvoju števila π niz 30 prvič zaseda šele 64. in 65. decimalno mesto:

$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078\ldots$

Med prvimi 100 000 decimalkami števila π se to zgodi 961-krat.

Na krožnici $x^2 + y^2 = 30^2$ s polmerom 30 v koordinatni ravnini Oxy je 12 točk s celoštevilskimi koordinatami:

$$(\pm 30, 0),\ (0, \pm 30),\ (\pm 18, \pm 24),\ (\pm 24, \pm 18).$$

Bernoullijevi števili $B_4 = B_8 = -1/30$ imata v imenovalcu število 30.

Število 720 ima 30 deliteljev. Število 9 lahko zapišemo kot vsoto naravnih števil na 30 načinov, pri čemer se ne oziramo na vrstni red sumandov. Število 30 je brezkvadratno, ker ni deljivo s kvadratom nobenega praštevila.

Število 30 je prikladno število. Primer. Za $x = 7$ in $y = 13$ dobimo

$$k = 7^2 + 30 \cdot 13^2 = 5\,119,$$

kar je praštevilo.Zapis je enoličen. Od Figarovih števil sta prikladni še 5 in 10.

Število $15 + \sqrt{226}$ se v razvoju v verižni ulomek izraža s številom 30:

$$15 + \sqrt{226} = [30; 30, 30, \ldots].$$

Sedaj pa navedimo besede za število 30 v nekaterih jezikih.

trideset — slovensko — 30

triginta — latinsko — XXX

trenta — italijansko

trente — francosko

treinta — špansko

trinta — portugalsko

trenta — katalonsko

trente — furlansko

tridek — esperanto

trenta — sicilijansko

trenta — napolitansko

τριάκοντα — klasično grško — λʹ

τριάντα — novogrško

тридцать — rusko

тридцять — ukrajinsko

трыццаць — belorusko

тридесет — srbsko

триесет — makedonsko

тридесет, трийсет — bolgarsko

гуч — mongolsko

утыз — tatarsko

dreißig — nemško

dertig — nizozemsko

þrjátíu — islandsko

tretti — norveško

trettio — švedsko

tredive — dansko

thirty — angleško

trideset — hrvaško

třicet — češko

tridsat' — slovaško

trzydzieści — poljsko

harminc — madžarsko

kolmekymmentä — finsko

kolmkümmend — estonsko

tridhjetë — albansko

otuz — turško

hogeita hamar — baskovsko

trisdešimt — litovsko

trīsdesmit — letonsko

tríocha — irsko

tregont — bretonsko

triganta — romsko

त्रिंशत् — sanskrt — ३० — trimšat

तीस — hindijsko — ३० — tis

तीस — marati — ३० — tis

तीस — nepalsko — ३० — tisa

ثلاثون — arabsko — ٣٠ — talatun

سی — perzijsko — ٣٠ — si

تیس — urdu — ٣٠ — tis

دېرش — pašto — ٣٠ — derš

שלושים — hebrejsko — ל — šlošim

7 Šestintrideset

Število 36 je sodo, leži med 35 in 37. Njegov razcep na prafaktorje je $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Pravilni 36-kotnik ni konstruktibilen z neoznačenim ravnilom in šestilom. Število 36 je kvadratno, $36 = 6^2 = (3!)^2$, šesto po vrsti. Je kvadrat tretjega trikotniškega števila $T_3 = 3 \cdot 4/2 = 6$. Pri tem je indeks 3 drugo trikotniško število, tako da velja: $(T_{T_2})^2 = 36$. Je pa 36 tudi osmo trikotniško, ker je $36 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 8 \cdot 9/2$. Zanimivost: šestintrideseto trikotniško število je 666, število zveri v Apokalipsi sv. Janeza. Pravimo, da je 666 dvojno trikotniško število, ker je $T_{T_8} = 666$. Ker je $36 = 25 + 10 + 1 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = [121]_5$, je 36 palindromno število v petiškem številskem sistemu. Velja tudi $36 = 4 \cdot 8 + 4 = [44]_8$. Število 36 je vsota dveh zaporednih praštevil: $36 = 17 + 19$. Številu 36 je tujih 12 števil, manjših od 36, zato $\varphi(36) = 12$.
V desetiškem razvoju števila π niz 36 prvič zaseda šele 285. in 286. decimalno mesto:

$$
\begin{aligned}
\pi = 3.&1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923 0\\
&7816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609 5\\
&5058223172535940812848111745028410270193852110555964462294895493 0\\
&3819644288109756659334461284756482337867831652712019091456485669 2\\
&3460348610454326648213393607260249141273724587006606315588174881 5\ldots
\end{aligned}
$$

Med prvimi 100 000 decimalkami števila π se to zgodi 950-krat.
Na krožnici $x^2 + y^2 = 36^2$ s polmerom 36 v koordinatni ravnini Oxy so le 4 točke s celoštevilskimi koordinatami: $(36, 0), (0, 36), (-36, 0), (0, -36)$.
Dvakratni kosinus kota 36° je zlato število: $2\cos 36^\circ = (1 + \sqrt{5})/2$.
Sedaj pa navedimo besede za število 36 v nekaterih jezikih.

šestintrideset — slovensko — 36

triginta sex — latinsko — XXXVI

trentasei — italijansko

trente-six — francosko

treinta y seis — špansko

trinta e seis — portugalsko

trenta-sis — katalonsko

trentesis — furlansko

tridek ses — esperanto

trentasei — sicilijansko

trentasèie — napolitansko

τριάκοντα ἕξ — klasično grško — λϛ′

τριάντα έξι — novogrško

тридцать шесть — rusko

тридцять шість — ukrajinsko

трыццаць шэсць — belorusko

тридесет шест — srbsko

триесет и шест — makedonsko

тридесет и шест, трийсет и шест — bolgarsko

гучин зургаа — mongolsko

утыз алты — tatarsko

sechsunddreißig — nemško

zesendertig — nizozemsko

þrjátíu og sex — islandsko

trettiseks — norveško

trettiosex — švedsko

seksogtredive — dansko

thirty-six — angleško

trideset i šest — hrvaško

šestatřicet, třicet šest — češko

tridsat'sest' — slovaško

trzydzieści sześć — poljsko

harminchat — madžarsko

kolmekymmentäkuusi — finsko

kolmkümmend kuus — estonsko

tridhjetë e gjashtë — albansko

otuzaltı— turško

hogeita hamasei — baskovsko

trisdešimt šeši — litovsko

trīsdesmit seši — letonsko

tríocha a sé — irsko

c'hwec'h warn tregont — bretonsko

triganta-u-šov — romsko

षट्त्रिंशत् — sanskrt — ३६ — šattrimšat

छत्तीस — hindijsko — ३६ — čhatis

छत्तीस — marati — ३६ — čhatis

छतीस — nepalsko — ३६ — čhatisa

ستة و ثلاثون — arabsko — ٣٦ — sita va-talatun

سی و شش — perzijsko — ۳۶ — si o šeš

چھتیس — urdu — ۳۶ — čhatis

شپوږدېرش — pašto — ٣٦ — špugderš

שלושים ושש — hebrejsko — לו — šlošim vešeš

8 Triinštirideset

Število 43 je štirinajsto praštevilo, leži med številoma 42 in 44. V desetiškem razvoju števila π niz 43 prvič zaseda že 23. in 24. decimalno mesto:

$$\pi = 3.14159265358979323846264 33\ldots$$

Med prvimi 100 000 decimalkami števila π se to zgodi 997-krat.

Število 43 je vsota treh kvadratov,

$$43 = 3^2 + 3^2 + 5^2,$$

pa tudi vsota štirih kvadratov:

$$43 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2.$$

Ker je

$$43 = 36 + 6 + 1 = 6^2 + 6^1 + 1 = [111]_6,$$

je 36 palindromno število v šestiškem številskem sistemu.

Število 43 lahko zapišemo kot vsoto praštevil:

$$43 = 2 + 41 = 11 + 13 + 19 = 2 + 11 + 13 + 17 = 3 + 5 + 7 + 11 + 17.$$

Pa tudi kot vsoto Fibonaccijevih števil:

$$43 = F_2 + F_4 + F_5 + F_7 + F_8 = 1 + 3 + 5 + 13 + 21.$$

Na krožnici $x^2 + y^2 = 43^2$ s polmerom 43 v koordinatni ravnini Oxy so samo 4 točke s celoštevilskimi koordinatami: $(43, 0), (0, 43), (-43, 0), (0, -43)$.

Število 43 je srečno število. Vsa števila od vključno 1 do vključno 42 so tuja 43: $\varphi(43) = 42$.

Sedaj pa navedimo besede za število 43 v nekaterih jezikih.

triinštirideset — slovensko — 43

quadraginta tres — latinsko — XLIII

quarantatré — italijansko

quarante-trois — francosko

cuarenta y tres — špansko

cuarenta e três — portugalsko

quaranta-tres — katalonsko

cuarantetrâ — furlansko

quarantatri — sicilijansko

quarantatré — napolitansko

kvardek tri — esperanto

τετταράκοντα τρεῖς — klasično grško — μγʹ

σαράντα τρία — novogrško

сорок три — rusko

сорок три — ukrajinsko

сокак тры — belorusko

четрдесет три — srbsko

четириесет и три — makedonsko

четиридесет и три, четиресет и три — bolgarsko

дөчин гурав — mongolsko

кырык өч — tatarsko

dreiundvierzig — nemško

drieënveertig — nizozemsko

fjörutíu og þrír — islandsko

førtitre — norveško

fyrtiotre — švedsko

treogfyrre — dansko

forty-three — angleško

četrdeset tri — hrvaško

třiačtyřicet, čtyřicet tři — češko

štyridsat'tri — slovaško

czterdzieści trzy — poljsko

negyvenhárom — madžarsko

neljäkymmentäkolme — finsko

nelikümmend kolm — estonsko

dyzet e tre — albansko

kirküç — turško

berrogei hiru — baskovsko

keturiasdešimt trys — litovsko

četrdesmit trīs — letonsko

ceathracha a trí, daicheada a trí — irsko

tri warn doau-ugent — bretonsko

dui-var-biš-u-trin, štar-var-deš-u-trin — romsko

त्रिचत्वारिंशत् — sanskrt — ४३ — tričatvarinšat

तैंतालीस — hindijsko — ४३ — taintalis

त्रेचाळीस — marati — ४३ — trečalis

त्रियालीस — nepalsko — ४३ — trijalisa

ثلاثة و اربعون — arabsko — ٤٣ — talata va-arbaun

چهل و سه — perzijsko — ۴۳ — čel o seh

تینتالیس — urdu — ۴۳ — tintalis

درڅلوېښت — pašto — ٤٣ — dersalvešt

ארבעים ושלוש — hebrejsko — מג — arbaim vešaloš

9 Vsota Figarovih števil

Vsota Figarovih števil je

$$5 + 10 + 20 + 30 + 36 + 43 = 144.$$

Predhodnik števila 144 je 143, naslednik pa 145. Nobeno od njiju ni praštevilo, ker je $143 = 11{\cdot}13$, $145 = 5{\cdot}29$. Število 144 je dvanajsto Fibonaccijevo število: $F_{12} = 144$. Število 144 ima 15 deliteljev:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.$$

Eulerjeva funkcija ima pri 144 vrednost $\varphi(144) = 48$.
Število 144 je kvadratno: $144 = 12^2$. Njegov razcep na prafaktorje je $144 = 2^4 \cdot 3^2$. Pravilni 144-kotnik ni konstruktibilen.
Če smo že omenili Apokalipso, povejmo, da v njem nastopa število 144, ne sicer kot tako, ampak pomnoženo s tisoč. Razodetje govori o 144 tisoč zaznamovanih,

ἑκατὸν τεσσαράκοντα τέσσαρες χιλιάδες ἐσφραγισμένοι,

in sicer iz vsakega rodu Izraelovega po dvanajst tisoč, δώδεκα χιλιάδες.
Euler je dokazal, da enačba $x^3 + y^3 = z^3$ nima rešitev v naravnih številih. Nato je predvideval, da jih tudi enačbi $x^4+y^4+z^4 = u^4$ in $x^5+y^5+z^5+u^5 = v^5$ nimata. Toda to ni res. Noam David Elkies, rojen leta 1966, je leta 1988 našel

$$2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4,$$

že leta 1966 pa sta Leon J. Lander in Thomas R. Parkin odkrila

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Za konec

Figarova števila $5, 10, 20, 30, 36, 43$ lahko, kot smo videli, zapišemo tudi z rimskimi številkami V, X, XX, XXX, XXXVI, XLIII, z grškimi alfabetičnimi številkami ε′, ι′, κ′, λ′, λϛ′, μγ′, pa tudi z grškimi akrofoničnimi številkami Π, Δ, ΔΔ, ΔΔΔ, ΔΔΔΠΙ, ΔΔΔΔΙΙΙ. Pri tem Ι pomeni 1, Π je velika začetna črka besede πέντε, kar pomeni pet, Δ pa velika začetna črka besede δέκα, kar pomeni deset.

Dodajmo temu še egipčanske in babilonske zapise Figarovih števil. Egipčanski zapisi so

$$\overset{|||}{||},\ \cap,\ \cap\cap,\ \cap\cap\cap,\ \cap\cap\cap\overset{|||}{|||},\ \overset{\cap\cap}{\cap\cap}|||.$$

babilonski klinopisni zapisi istih števil pa

𒐊, 𒌋, 𒎙, 𒌍, 𒌍𒐋, 𒐏𒐈.

Maji v Srednji Ameriki so uporabljali dvajsetiški številski sistem, ki je poznal števke

0 = 𝋠, 1 = 𝋡, 2 = 𝋢, 3 = 𝋣, 4 = 𝋤, 5 = 𝋥, 6 = 𝋦, 7 = 𝋧, 8 = 𝋨, 9 = 𝋩, 10 = 𝋪, 11 = 𝋫, 12 = 𝋬, 13 = 𝋭, 14 = 𝋮, 15 = 𝋯, 16 = 𝋰, 17 = 𝋱, 18 = 𝋲, 19 = 𝋳

Zapisali smo jih v horizontalni obliki. Število 2015 v majevski horizontalni izvedbi je potem $\left|\begin{array}{c}\text{𝋥}\\ \text{𝋠}\\ \text{𝋯}\end{array}\right|$. To pomeni $5 \cdot 20^2 + 0 \cdot 20^1 + 15 = 5 \cdot 400 + 15 = 2015$.

Figarova števila v tem majevskem zapisu med dvema navpičnima črtama so:

$$5 = \left|\,\text{𝋥}\,\right|, 10 = \left|\,\text{𝋪}\,\right|, 20 = \left|\begin{array}{c}\text{𝋡}\\ \text{𝋠}\end{array}\right|, 30 = \left|\begin{array}{c}\text{𝋡}\\ \text{𝋪}\end{array}\right|, 36 = \left|\begin{array}{c}\text{𝋡}\\ \text{𝋰}\end{array}\right|, 43 = \left|\begin{array}{c}\text{𝋢}\\ \text{𝋣}\end{array}\right|.$$

Maji so uporabljali za ničlo precej razkošen znak, ki se po slogu bistveno razlikuje od preostalih števk.

10 Nekaj besed grškega izvora

Nekaj besed grškega izvora smo razložili že v opisu posameznih Figarovih števil. Dodajmo jih še nekaj, ki smo jih uporabili!

akrofoničen — iz ἄκρος, skrajni, zunanji, vrhnji, najvišji, rtast, šilast + φωνή, glas. zvok, šum. Imenovan po prvi črki besede. Primer: grška črka β, beta, ki so jo Grki prevzeli od Feničanov, je nastala po akrofoničnem principu kot prva črka semitske besede bet, kar pomeni hiša. Po akrofoničnem principu so na primer označili število 10 z Δ, kar je prva črka besede ΔΕΚΑ, kar pomeni deset.

alfabetičen — iz ἄλφα, ime prve črke (α) + βῆτα, ime druge črke (β) urejenega sistema grških črk. Zaradi urejenosti so prvo črko lahko uporabili za število 1, drugo za 2 itd. Tako so dobili alfabetičen način zapisa števil. Analogen način so uporabljali Hebrejci s svojimi črkami.

analiza — iz ἀνάλυσις, razveza, razrešitev, odrešenje, osvoboditev.

apokalipsa — iz ἀποκάλυψις, razodetje, odkritje.

babilonski — iz Βαβυλών, Babilon.

dekada — iz δέκας, rodilnik δεκάδος, desetka, desetica, desetina.

dodekaerder — iz δώδεκα, dvanajst + ἕδρα, stol, osnova. Dvanajsterec, dvanajsterostenje.

egipčanski — iz Αἴγυπτος, Egipt.

heksaeder — iz ἕξ, šest + ἕδρα, stol, osnova. Šesterec, šesterostenje.

ikozaeder — iz εἴκοσι, dvajset + ἕδρα, stol, osnova. Dvajseterec, dvajseterostenje.

magičen — iz μαγεία, čaranje, čarodejstvo, slepilo, magija, sleparstvo, vraža.

matematika — iz μάθημα, česar se je treba naučiti, predmet učenja, znanje, znanost, veda, nauk, učenje, poduk.

oktaeder — iz ὀκτώ, osem + ἕδρα, stol, osnova. Osmerec, osmerostenje.

palindromen — iz πάλιν, nazaj, zopet + δρόμος, pot, steza, tek. Lastnost znakovnega niza, ki se enako bere z leve proti desni in z desne proti levi.

piramida — iz πυραμίς, piramida. Geometrijsko telo, določeno s konveksnim ravninskim večkotnikom (osnovno ploskvijo) in točko (vrhom) izven ravnine tega večkotnika. Vrh piramide je povezan z daljicami (stranskimi robovi) z vsemi oglišči osnovne ploskve. Robovi osnovne ploskve in stranski robovi določajo trikotnike (stranske ploskve), ki sestavljajo plašč piramide. Obstajajo pokončne, poševne, pravilne, tristrane, kvadratne, … piramide.

pitagorejski — iz Πυθαγόρας, Pitagora, starogrški matematik in filozof.

polieder — iz πολύ, mnogo + ἕδρα, stol, osnova. Mnogoogelnik, mnogoploščnik, mnogostenje.

sistem — iz σύστημα, združitev, celota, truma, drhal, društvo, zbor, oddelek, sistem.

tetraeder — iz τέτταρες, štiri + ἕδρα, stol, osnova. Četverec, četverostenje.

Literatura

[1] K. Devlin, *The man of numbers: Fibonacci's arithmetic revolution*, Bloomsbury Publishing, London in drugje, 2011.

[2] A. Dokler, *Šolski grško–slovenski slovar*, Založba ZRC, ZRC SAZU, Ljubljana 2015.

[3] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2008.

[4] U. C. Merzbach, C. B. Boyer, *A history of mathematics*, Third edition, John Wiley & Sons, Hobiken, New Jersey, 2011.

[5] A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by its history*, Springer, Heidelberg in drugje, 2012.

[6] S. Schwartzman, *The words of mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington DC, 1994.

[7] J. Stillwell, *Mathematics and its history*, Springer, New York in drugje, 2010.

[8] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1972.